

# ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE SÓLIDOS ELÁSTICOS BIDIMENSIONAIS REFORÇADOS COM FIBRAS VIA MEF

Maria do Socorro Martins Sampaio<sup>1</sup>, Humberto Breves Coda<sup>2</sup> & Rodrigo Ribeiro Paccola<sup>3</sup>

## Resumo

*Uma formulação não linear geométrica, Lagrangiana total, simples e precisa baseada no método dos elementos finitos para a análise de sólidos elásticos bidimensionais reforçados com fibras é introduzida. Uma estratégia eficiente para a modelagem das fibras inclusas no domínio sem a introdução de novos graus de liberdade no sistema de equações resultante e sem a necessidade de coincidência de nós na discretização das fibras e da matriz é apresentada. Um exemplo numérico que consiste em uma viga enrijecida reforçada com fibras aleatórias é simulado para demonstrar as potencialidades da metodologia desenvolvida.*

*Palavras-chave: Método dos elementos finitos posicional. Análise não linear geométrica. Sólidos elásticos bidimensionais reforçados com fibras.*

## GEOMETRICALLY NONLINEAR ANALYSIS OF FIBER-REINFORCED TWO-DIMENSIONAL ELASTIC SOLIDS WITH FEM

### Abstract

*A simple and accurate Lagrangian geometric nonlinear formulation based on the finite element method for the analysis of fiber-reinforced two-dimensional elastic solids is introduced. An efficient strategy for modeling fibers included in the field without introducing new degrees of freedom in the resulting system of equations without the need for coincidence of nodes in the discretization of the fiber and matrix is presented. A numerical example consisting of a stiff beam reinforced with random fibers is simulated to demonstrate the potential of the developed methodology.*

*Keywords: Positional finite element method. Geometrically nonlinear analysis. Fiber-reinforced two-dimensional elastic solids.*

*Linha de Pesquisa: Mecânica das Estruturas.*

## 1 INTRODUÇÃO

Matrizes reforçadas com fibras constituem uma classe de materiais compósitos amplamente utilizados na fabricação de equipamentos esportivos, estruturas aeroespaciais, automotivas, civis, *offshore*, entre muitas outras aplicações (Herakovich, 1998).

Devido às excelentes propriedades mecânicas apresentadas pelos compósitos em comparação aos materiais ditos convencionais, seu emprego na obtenção de estruturas mais leves, mais delgadas e conseqüentemente mais deslocáveis tem se intensificado nas últimas décadas.

<sup>1</sup> Doutoranda em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, ssampaio@sc.usp.br

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, hbcoda@sc.usp.br

<sup>3</sup> Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, rpaccola@sc.usp.br



Para prever com precisão a resposta de componentes fabricados a partir de compósitos reforçados com fibras sujeitos a grandes deslocamentos deve-se estudar a condição de equilíbrio na configuração atual do corpo e adotar uma estratégia eficiente para a modelagem das fibras inclusas no domínio.

Neste trabalho, apresenta-se uma formulação não linear geométrica para análise de sólidos elásticos bidimensionais reforçados com fibras. O procedimento adotado para inserir as fibras em uma posição qualquer do domínio sem aumentar o número de graus de liberdade do sistema foi apresentado por (Vanalli, 2004) para a análise de problemas lineares geométricos.

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 Modelagem da matriz

Para discretizar o sólido ou a matriz elástica utilizam-se elementos finitos de chapa com ordem qualquer de aproximação. Os parâmetros nodais dos elementos finitos utilizados são as posições (Coda; Greco, 2004). As deformações são medidas em relação a um referencial fixo no espaço, a configuração inicial do corpo, caracterizando a descrição Lagrangiana total ou material do movimento e a medida de deformação utilizada é a de Green associada à Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff (Ciarlet, 1993). A condição de equilíbrio do problema não linear geométrico é encontrada a partir do Princípio da Mínima Energia Potencial Total (Tauchert, 1974) e a estratégia de solução numérica adotada para resolver o sistema não linear de equações é o procedimento iterativo de Newton-Raphson (Luenberger, 1989). As ações externas podem ser introduzidas ao sistema de forma total ou incremental.

### 2.2 Modelagem das fibras

Para simular trechos de fibra longa ou fibras curtas inseridas no domínio utilizam-se elementos finitos de barra simples que também consideram consistentemente a não linearidade geométrica. Para garantir a aderência das fibras à matriz sem introduzir novos graus de liberdade no sistema de equações resultante e sem a necessidade de coincidência de nós na discretização das fibras e da matriz utilizam-se relações cinemáticas simples que consistem em escrever as posições nodais das fibras em função das posições nodais dos nós dos elementos finitos de chapa onde as fibras estão imersas (Vanalli, 2004). Radtke, Simone e Sluys (2011) classificam esta estratégia como “*Tailored Kinematic descriptions*”.

## 3 RESULTADOS

Para demonstrar as potencialidades da formulação introduzida simula-se uma estrutura submetida a grandes deslocamentos. Esta estrutura consiste em uma viga simplesmente engastada de comprimento  $L$  e altura  $h$  solicitada por um carregamento uniformemente distribuído  $q$ . Esta viga é reforçada por um enrijecedor e por fibras curtas aleatórias conforme mostrado na Fig. 1.

Os dados do problema são:  $L=300\text{cm}$ ,  $h=10\text{cm}$ ,  $b=1\text{cm}$  e  $q=5\text{N/cm}$ . O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz são dados por  $E_c = 21 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$  e  $\nu = 0$ . Para a fibra longa, o módulo de elasticidade e a área da seção transversal são dados, respectivamente, por  $E_f = 210 \times 10^5 \text{ N/cm}^2$  e  $A_f = 0,1\text{cm}^2$ , sendo  $d=2,5\text{cm}$  e  $h' = 7,5\text{cm}$ . O comprimento das fibras curtas é  $L_f = 2,54\text{cm}$ , sendo o módulo de elasticidade e a área da seção transversal os mesmos da fibra longa.

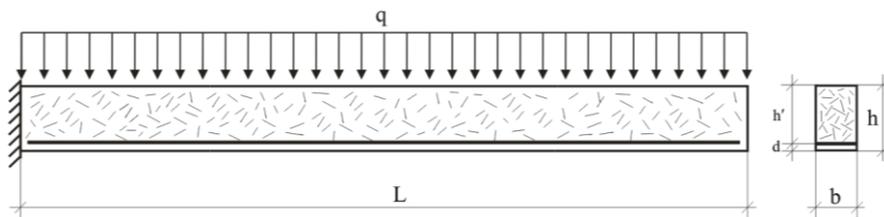


Figura 1 – Viga simplesmente engastada reforçada com fibras aleatórias.

A matriz foi discretizada em trezentos elementos finitos de chapa com seis nós por elemento e dois graus de liberdade por nó. A fibra longa foi discretizada em cento e vinte elementos finitos de barra simples e as cento e dezoito fibras curtas, correspondendo a um volume de 1% de fibras curtas em relação ao volume total da viga, foram discretizadas com um elemento finito de barra simples cada. Os resultados obtidos com a formulação proposta podem ser visualizados na Fig. 2 que mostra a configuração da viga após a deformação.

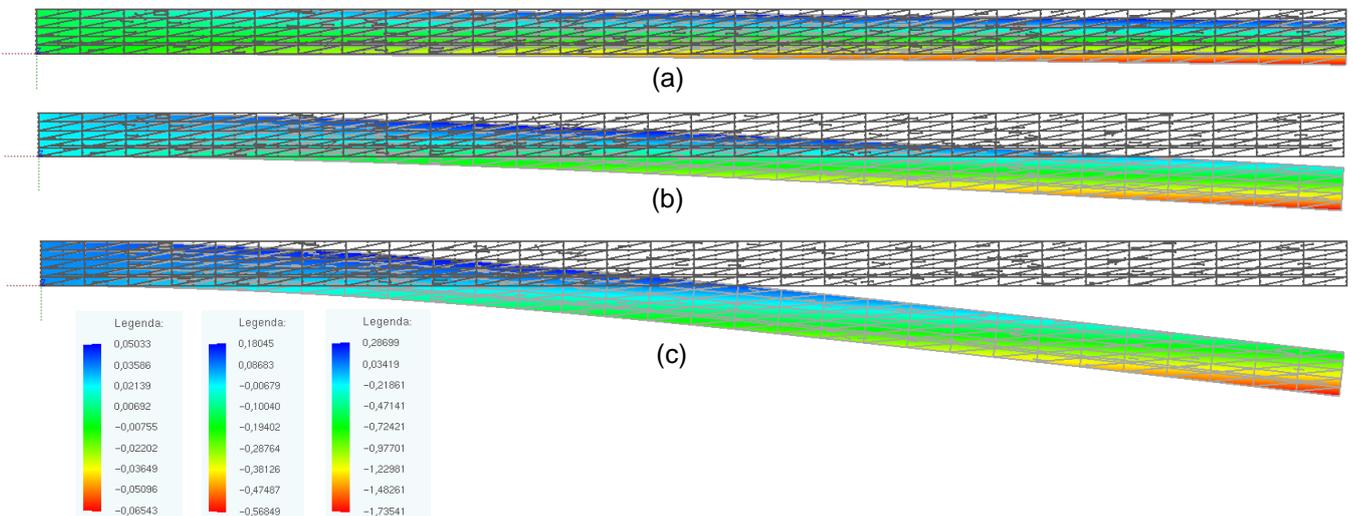


Figura 2 – Configuração deformada da viga simplesmente engastada reforçada com fibras aleatórias: (a) passo 1; (b) passo 5; (c) passo 10.

Para validar a formulação desenvolvida e o código computacional implementado, a estrutura da Fig. 1 foi analisada para o caso de pequenos deslocamentos considerando-se  $q = 0,5\text{N/cm}$  e desprezando-se a contribuição do enrijecedor e das fibras curtas. Nesta análise obteve-se que a flecha máxima na extremidade livre da viga é dada por  $\delta \cong 2,896\text{cm}$ , que comparada com o correspondente resultado obtido da Resistência dos Materiais,  $\delta \cong 2,892\text{cm}$ , fornece um desvio entre as soluções de aproximadamente 0,138%. Ainda para o caso de pequenos deslocamentos, o exemplo da Fig. 1 foi analisado considerando-se a contribuição do enrijecedor. Neste caso, a flecha máxima na extremidade livre da viga enrijecida é  $\delta \cong 2,718\text{cm}$  e o correspondente resultado obtido da Resistência dos Materiais considerando a seção homogeneizada é  $\delta \cong 2,708\text{cm}$ , resultando em um desvio entre as soluções de aproximadamente 0,369%.

Para simular grandes deslocamentos adotou-se  $q = 50\text{N/cm}$ . Neste caso, as flechas máximas na extremidade livre da viga, obtidas desprezando-se e considerando-se a contribuição do enrijecedor são dadas, respectivamente, por  $\delta \cong 193,053\text{cm}$  e  $\delta \cong 187,263\text{cm}$ . Estes resultados foram

comparados com resultados de referência obtidos com o AcadFrame<sup>4</sup>. A partir das flechas obtidas com esta ferramenta de referência para os casos considerados,  $\delta \cong 189,268\text{cm}$  e  $\delta \cong 183,168\text{cm}$ , observa-se desvios entre as soluções de aproximadamente 1,999% e 2,235%, respectivamente.

## 4 CONCLUSÃO

Uma formulação não linear geométrica simples e precisa para a análise de domínios elásticos bidimensionais reforçados com fibras é apresentada. A principal vantagem da formulação apresentada está na simplicidade das relações cinemáticas adotadas que garantem a aderência das fibras à matriz sem introduzir novos graus de liberdade no sistema de equações resultante e sem a necessidade de coincidência de nós na discretização das fibras e da matriz. Além disto, a formulação apresentada permite que as fibras sejam inseridas no domínio de forma determinística ou aleatória. É importante notar que, como os elementos de fibra não possuem rigidez à flexão, mesmo que a rigidez da fibra seja muito elevada ela não é capaz de impedir todos os graus de liberdade dos elementos de chapa. O exemplo apresentado demonstra as potencialidades da formulação implementada.

## 5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM), à Secretaria de Estado de Ciência e Tecnologia (SECT) e ao Governo do Estado do Amazonas que concederam suporte financeiro para o desenvolvimento desta pesquisa.

## 6 REFERÊNCIAS

CIARLET, P. G. **Mathematical Elasticity**. North-Holland, 1993.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 193:3541-3557, 2004.

HERAKOVICH, C. T. **Mechanics of fibrous composites**. John Wiley & Sons, Inc., 1998.

LUENBERG, D. G. **Linear and nonlinear programming**. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

RADTKE, F. K. F.; SIMONE, A.; SLUYS, L. J. A partition of unity finite element method for simulating non-linear debonding and matrix failure in thin fiber composites. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 86:453–476, 2011.

TAUCHERT, T. R. **Energy principles in structural mechanics**. McGraw Hill, 1974.

VANALLI, L. **O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscopásticos em meios anisotrópicos e composto**. Tese de Doutorado, SET, Universidade São Paulo, São Carlos, Brasil, 2004.

---

<sup>4</sup> Ferramenta computacional de análise estrutural desenvolvida para fins de ensino em engenharia pelo prof. Dr. Humberto Breves Coda e pelo prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola. Esta ferramenta utiliza o Método dos Elementos Finitos com parâmetros nodais em posições para a análise de pórticos e treliças planas incluindo não linearidade geométrica.