

FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTATO GENERALIZADOS PARA PROBLEMAS DE SIGNORINI

Dorival Piedade Neto¹ & Sergio Persival Baroncini Proença²

Resumo

O problema de Signorini constitui um modelo teórico que descreve o contato sem atrito entre sólidos deformáveis e anteparos rígidos. Assim como no Método dos Elementos Finitos (MEF), sua modelação utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) para problemas da elasticidade plana pode ser realizada por meio de elementos de contato do tipo nó-segmento ou do tipo segmento-segmento. Nos primeiros, as restrições decorrentes do contato se aplicam sobre os nós do sólido deformável, enquanto no segundo, as mesmas se aplicam ao contorno dos elementos. A formulação de ambos os tipos de elementos de contato para o MEFG, enriquecidos com funções polinomiais adimensionalizadas, é brevemente apresentada, discutindo-se sua aplicabilidade para resolução numérica deste tipo de problema.

Palavras-chave: Problema de Signorini. Problema de Contato. Método dos Elementos Finitos Generalizados. Elemento de contato generalizado.

GENERALIZED CONTACT ELEMENTS FORMULATION FOR SIGNORINI PROBLEMS

Abstract

The Signorini problem is a theoretical model that treats the frictionless contact between deformable solids and rigid supports. As in the Finite Element Method (FEM), its modeling using the Generalized Finite Element Method (GFEM) for plane elastic problems can be performed by means of node-to-segment or segment-to-segment contact elements. The first of them applies the constraints due to contact over the solid's nodes, while the second one are applied over the element's boundary. The formulation of both contact elements for the GFEM, enriched using dimensionless polynomial functions, is briefly presented, discussing its employment to numerically solve this kind of problem.

Keywords: Signorini problem. Contact problem. Generalized Finite Element Method. Generalized contact element.

Linha de Pesquisa: Métodos Numéricos.

1 INTRODUÇÃO

Os problemas de contato ocorrem quando, durante o processo mecânico, sólidos distintos tendem a ocupar a mesma posição no espaço. Disto decorrem forças de ação e reação, cuja magnitude, direção e área de atuação apenas podem ser determinadas no decorrer do processo de resolução do problema, configurando-se assim um problema não-linear. Quando no modelo físico idealiza-se que um dos sólidos é indeformável, e desconsidera-se a ocorrência de forças de atrito entre as superfícies dos mesmos, configura-se um problema de contato de Signorini.

¹ Doutorando em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, dpiedade@sc.usp.br

² Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, persival@sc.usp.br



A forma fraca das equações diferenciais que regem os problemas de contato constitui uma desigualdade variacional, que é utilizada como base teórica para a aplicação de métodos numéricos capazes de resolver o problema não-linear por ela descrito. Tradicionalmente utiliza-se o Método dos Elementos Finitos (MEF), que no caso de problemas planos podem ser resolvidos por meio da utilização de elementos do tipo nó-segmento ou do tipo segmento-segmento na região de contato.

O presente trabalho descreve o desenvolvimento da formulação e a implementação computacional de ambos os tipos de elementos de contato para problemas de Signorini modelados por meio do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Mais especificamente, é apresentada uma formulação baseada em penalização, para sólidos enriquecidos com funções polinomiais adimensionalizadas.

2 METODOLOGIA

Tratando-se de um trabalho de desenvolvimento e implementação de método numérico, a metodologia empregada faz uso de três ramos complementares: modelo físico-matemático, modelo numérico e modelo computacional. O primeiro é desenvolvido a partir da Mecânica dos Sólidos e Mecânica do Contato. Estabelecido o modelo matemático que descreve o problema, desenvolvem-se estratégias numéricas, neste caso, seguindo a filosofia do MEFG, de enriquecimento das funções que constituem a partição da unidade (PU). Estabelecido o modelo numérico, o mesmo é implementado em um código computacional. Neste trabalho, o modelo computacional foi desenvolvido em linguagem de programação Python e segundo o paradigma de programação orientada a objetos (POO).

2.1 Expressões fundamentais da mecânica dos sólidos

O problema de contato de Signorini em um sólido de domínio Ω sujeito a forças de corpo f , bem como a forças e deslocamentos prescritos, respectivamente, nas parcelas Γ_σ e Γ_u de seu contorno, é descrito pela inequação variacional

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega \leq \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_N d\Gamma, \forall \delta \mathbf{u} / \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_u, \delta \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \text{ em } \Gamma_c, \quad (1)$$

na qual $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ e $\delta \mathbf{u}$ são respectivamente campos de deformação e de deslocamento virtuais compatíveis, e $\boldsymbol{\sigma}$ é o campo de tensões no sólido. A terceira integral ao lado direito da desigualdade representa o termo relativo ao trabalho virtual do contato que pode ocorrer na região de contato Γ_c , sendo \mathbf{t}_N a força que se observa entre as superfícies nesta região. A restrição $\delta \mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ é compatível com a condição de vinculação unilateral em Γ_c .

Numericamente a expressão (1) pode ser resolvida por meio de um processo incremental iterativo, como o Método de Newton-Raphson. O termo relativo ao trabalho virtual do contato impõe restrição sobre o campo de deslocamento, que deve ser verificada nos pontos de Γ_c que tendem a penetrar no anteparo rígido. O controle sobre a penetração é realizado por meio de uma função g que mede a distância entre os pontos das superfícies de contato em potencial.

Ao longo do processo de análise numérica, uma vez detectado o contato, a estratégia de penalização pode ser utilizada para impor as restrições em Γ_c . Nesse caso, empregando-se um fator de penalização λ , a parcela adicional à forma fraca do problema fica dada pela seguinte integral:

$$\int_{\Gamma_c} \lambda g \delta g d\Gamma. \quad (2)$$

Como consequência, o sistema resolvente passa a receber uma parcela adicional na matriz dos coeficientes e no vetor de forças nodais. Para um melhor entendimento da formulação forte e fraca do problema de contato, recomenda-se a leitura de (Laursen, 2002).

2.2 O MEFG e os elementos de contato generalizados

O MEFG é baseado no conceito de PU (Babuška and Melenk, 1997), tendo sua origem no Método das nuvens hp (Duarte and Oden, 1996). Uma PU é um conjunto de funções cuja soma é igual à unidade em seu suporte. O método visa obter funções de interpolação enriquecidas por meio da multiplicação da PU com funções quaisquer, inserindo para cada função de enriquecimento um novo grau de liberdade nodal.

Nesta etapa do trabalho foram utilizadas no enriquecimento funções polinomiais adimensionalizadas do tipo bolha, definidas de tal forma a apresentar valor nulo no nó atrelado à PU a ser enriquecida. Esta característica faz com que sejam preservados os significados dos graus de liberdade nodais originais. Neste caso, os elementos de contato do tipo nó-segmento resultam exatamente os mesmos utilizados no MEF tradicional (Piedade Neto, 2009), derivando diretamente da aplicação da restrição da Eq. (2) apenas sobre os nós do sólido deformável.

Já os elementos do tipo segmento-segmento no MEFG dependem do enriquecimento utilizado e resultam da Eq. (2), acrescentando contribuições \mathbf{K}^{ss} e \mathbf{f}^{ss} , respectivamente para a matriz do sistema e o vetor independente, expressas nas formas:

$$\mathbf{K}^{ss} = \int_{\Gamma_c} \lambda [(\mathbf{n}\Phi) \otimes (\mathbf{n}\Phi)] d\Gamma \text{ e } \mathbf{f}^{ss} = - \int_{\Gamma_c} g_0 [\Phi^T \mathbf{n}^T] d\Gamma. \quad (3)$$

Na Eq. (3), Γ_c é o domínio do elemento de contato, \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície do anteparo, g_0 é o valor da distância inicial entre os pontos das superfícies contactantes, e Φ é uma matriz contendo um arranjo das funções de forma (enriquecidas inclusive), de dimensões $(2 \times n_d)$, sendo n_d o número total de graus de liberdade (incluindo os relacionados ao enriquecidos).

3 DESENVOLVIMENTO

Ambos os tipos de elementos de contato generalizados foram implementados em um código computacional elaborado segundo o paradigma de programação orientada a objetos (OOP) em linguagem de programação Python. Os resultados obtidos foram avaliados por meio de exemplos e indicam a viabilidade da utilização da formulação desenvolvida. Entretanto, há ainda a necessidade do aprimoramento de algumas técnicas para melhorar a qualidade de alguns resultados. Após a correção de tais problemas, a formulação será estendida para problemas de contato entre sólidos deformáveis, e aprimorada para uma descrição cinemática não-linear, visando sua aplicação em problemas com grandes deslocamentos.

4 RESULTADOS OBTIDOS OU ESPERADOS

A Figura 1 ilustra um simples exemplo de contato e os resultados obtidos para sólidos enriquecidos com funções polinomiais do tipo bolha.

Os elementos de contato do tipo nó-segmento aplicados a sólidos enriquecidos apresentam problema de penetração na interface de contato entre os nós (Figura 1b). Estratégias adicionais estão

sendo desenvolvidas no sentido de resolver este problema nos elementos do tipo nó-segmento. Já os elementos do tipo segmento-segmento não apresentam tal problema (Figura 1c). Por outro lado demandam aprimoramento da técnica para sanar a ocorrência de tensões de tração na interface de contato, observada em alguns exemplos. Em ambos os casos, a solução dos problemas citados se mostra viável.

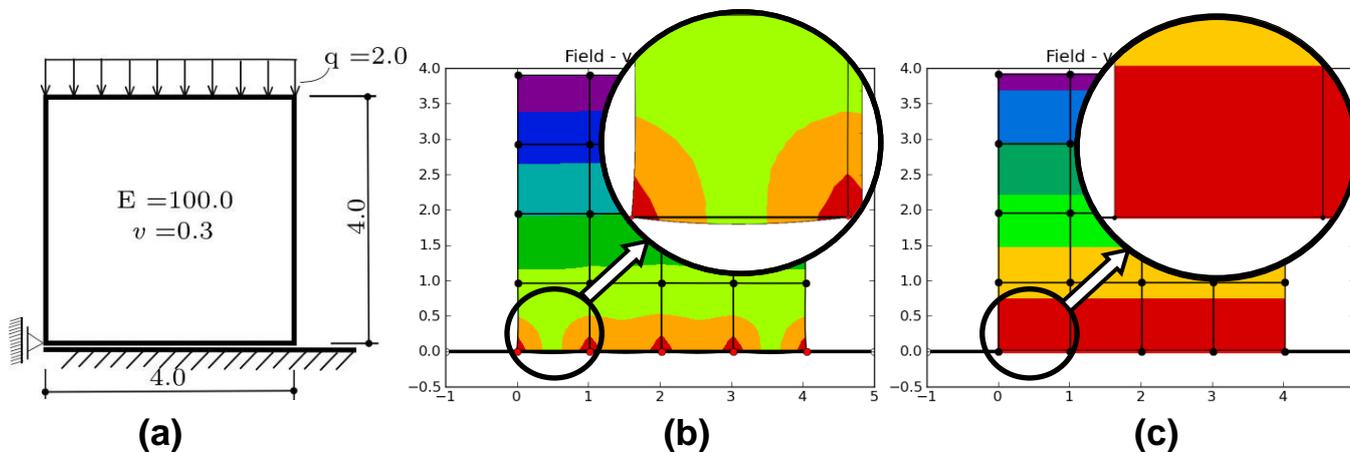


Figura 1 – Problema de contato proposto (a); resultado obtido por meio de elementos do tipo nó-segmento (b); resultado obtido por meio de elementos do tipo segmento-segmento (c).

5 CONCLUSÕES PARCIAIS

Apesar da necessidade do desenvolvimento de algumas técnicas adicionais para o aprimoramento da qualidade dos resultados, os exemplos testados indicam que os elementos de contato desenvolvidos poderão ser utilizados para problemas modelados utilizando o MEF, constituindo em contribuição necessária para aplicação consistente do método na análise não-linear de estruturas.

6 AGRADECIMENTOS

Agradecemos à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro (bolsa de doutorado), e ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (SET-EESC-USP).

7 REFERÊNCIAS

- LAURSEN, T. A. **Computational Contact and Impact Mechanics: Fundamentals of Modeling Interfacial Phenomena in Nonlinear Finite Element Analysis**. Heidelberg. Springer-Verlag, 2002. 454 p.
- PIEADADE NETO, D. **Sobre estratégias de resolução numérica de problemas de contato**. 147 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An hp adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 237-262, 1996.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M., The Partition of Unity Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.140, n. 4, p. 727–758, 1997.