PROPOSTA DE MODELAGEM PARA O CONCRETO FUNDAMENTADA NAS TEORIAS DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO E MECÂNICA DA FRATURA

Luiz Antonio Farani de Souza¹ & Roberto Dalledone Machado²

Resumo

As teorias da Plasticidade, da Mecânica do Dano e da Mecânica da Fratura são amplamente difundidas para a análise de estruturas em concreto armado, sendo cada uma delas adequada para simular determinado fenômeno. A tendência é o emprego conjunto dessas teorias para a representação dos fenômenos relacionados ao comportamento desse material. Por consequência, este artigo apresenta um estudo acerca da resposta estrutural do acoplamento do modelo constitutivo clássico de dano proposto por Mazars e um modelo de fraturamento no modo I. A fissura é simulada através do elemento de interface de linha, podendo considerar o fenômeno de amolecimento – linear, bilinear ou exponencial no modelo constitutivo. Análises numéricas não lineares por elementos finitos são efetuadas a partir de problemas encontrados na literatura, em especial, de um tirante armado adaptado de MAZARS e PIJAUDIER-CABOT (1989).

Palavras-chave: Concreto. Mecânica do Dano. Elemento de Interface de Linha. Fratura. Amolecimento.

PROPOSAL OF MODELING FOR CONCRETE BASED ON THEORIES OF CONTINUUM DAMAGE MECHANICS AND FRACTURE MECHANICS

Abstract

Theories of Plasticity, Damage Mechanics and Fracture Mechanics are widely known for the analysis of reinforced concrete structures, each of which is adequate to simulate a given phenomenon. The tendency is the combined use of these theories for the representation of phenomena related to the behavior of this material. In consequence, this paper presents a study on the structural response of the coupling of classical damage constitutive model proposed by Mazars and a model of fracture in mode I. The crack is simulated through the line interface element, which can consider the phenomenon of softening - linear, bilinear or exponential - in the constitutive model. Non-linear numerical analyses by finite elements are made from problems encountered in the literature, in particular, of a reinforced rod adapted of MAZARS and PIJAUDIER-CABOT (1989).

Keywords: Concrete. Damage Mechanics. Line Interface Element. Fracture. Softening.

1 INTRODUÇÃO

Com o avanço tecnológico, o grau de segurança obtido e o baixo custo de pesquisas computacionais, comparado com ensaios experimentais, vêm possibilitando cada vez mais a aplicação de técnicas numéricas na solução de problemas de estruturas de concreto. As teorias da Plasticidade, da Mecânica do Dano e da Mecânica da Fratura são amplamente difundidas para a

¹ Doutor em Métodos Numéricos – UFFS, campus Cerro Largo, luiz.souza@uffs.edu.br

² Doutor em Engenharia – UFPR, rdm@ufpr.br

análise de estruturas em concreto armado, sendo cada uma delas adequada para simular determinado fenômeno.

Uma evolução natural são os modelos que acoplam mais de uma teoria para a representação dos fenômenos relacionados ao comportamento do concreto, surgindo daí formulações quase sempre complexas (ÁLVARES, 1999). No entanto, buscando diminuir o grau de complexidade das formulações, mas ainda levando-se em conta na sua formulação o acoplamento de efeitos, e por consequência de teorias, grande destaque tem sido dado aos chamados modelos constitutivos simplificados.

Dificuldades na modelagem computacional de estruturas de concreto são decorrentes, entre outros fatores: da significativa diferença entre as resistências à tração e à compressão do concreto; da não linearidade da relação tensão-deformação já para níveis de tensão relativamente baixos; dos fenômenos de fluência e retração que dependem, por exemplo, da umidade e temperaturas ambientes e das dimensões dos elementos estruturais; da fissuração do concreto, que pode ocorrer já nas primeiras idades; e da transmissão de esforços através das fissuras (AURICH, 2009).

A Mecânica do Dano se fundamenta nos princípios gerais da Termodinâmica e constitui-se numa teoria constitutiva para sólidos com defeitos em sua microestrutura. Uma das hipóteses da Termodinâmica é que os processos irreversíveis, levados em conta por um número finito de variáveis internas, ocorrem numa velocidade suficientemente baixa, de modo que podem ser aproximadas por uma sequência de estados de equilíbrio aos quais correspondem a valores instantâneos das variáveis representativas (LEMAITRE, 1996; PITUBA; PROENÇA, 2005).

Modelos basedos na Mecânica da Fratura podem ser utilizados para representar o concreto, uma vez que esse é um material frágil e que fissura sob carga de serviço. A aplicação dessa teoria para o concreto é bastante útil na medida em que considera a maneira como o tamanho de um elemento estrutural afeta a sua capacidade de carga última, e fornece um critério adequado para a previsão de propagação das fissuras. Esse critério, que combina energia de tensão ou de deformação, é muito eficiente para análise de fissura pelo Método de Elementos Finitos. Contudo, como no concreto armado uma grande zona de fissuras distribuídas cresce e dissipa energia antes que uma trinca maior possa se formar e se propagar, o critério básico de caracterização da fratura, por meio de um critério de energia, deve ser complementado pela introdução de um critério de resistência, visto que a zona de fraturamento não é suficientemente pequena (LEONEL *et al.*, 2003).

Este artigo apresenta um estudo acerca da resposta estrutural do acoplamento do modelo constitutivo clássico de dano proposto por MAZARS (1984) e um modelo de fraturamento no modo I baseado no trabalho de SCHELLEKENS (1990) e adaptado por BUENO (1999). Esses modelos foram implementados em código Fortran - COMPAQ VISUAL FORTRAN EDITON 6.5 -, utilizando o Método dos Elementos Finitos. A fissura é simulada através do elemento de interface de linha, podendo considerar o fenômeno de amolecimento – linear, bilinear ou exponecial - no modelo constitutivo. Análises numéricas não lineares são efetuadas a partir de problemas encontrados na literatura, em especial, de um tirante armado adaptado de MAZARS e PIJAUDIER-CABOT (1989).

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Elemento de interface de linha e lei de amolecimento

As descontinuidades geométricas podem ser modeladas com muito êxito por meio de elementos finitos de interface. Esses elementos têm a finalidade de transmitir esforços entre dois corpos ou partes do mesmo entre as quais se encontra (BUENO, 1999).

Neste artigo foram utilizados elementos de interface de linha para simular fissuras préestabelecidas na peça supondo o modo de fraturamento I, conforme é ilustrado na Figura 1. O efeito de modo I é representado pela transmissão de esforços normais às faces da fissura. Proposta de modelagem para o concreto fundamentada nas teorias da mecânica do dano contínuo e mecânica da fratura



Figura 1 – Modo de fraturamento I. Fonte: BUENO (1999).

O elemento de interface de linha é baseado no trabalho de SCHELLEKENS (1990) e adaptado por BUENO (1999). Esse elemento é definido pelo seu comprimento e seus nós apresentam dois graus de liberdade (*u*, *v*). Na Figura 2 é apresentado um desenho esquemático do mesmo na configuração indeformada e deformada (SCHELLEKENS, 1990, BUENO, 1999).



Figura 2 – Configuração indeformada e deformada do elemento de interface de linha. Fonte: PALIGA *et al.* (2007).

Esse elemento de interface unidimensional é isoparamétrico, com quatro pontos nodais, funções de forma lineares e espessura zero. Devido à espessura zero, é suficiente representá-lo através de pseudo nós equivalentes 1' e 2', como é mostrado na Figura 3.





O vetor de deslocamentos nodais *u* é dado por:

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{bmatrix}^T$$
(1)

Onde $u_i \in v_i$, $i = 1, \dots, 4$, são os deslocamentos nodais na direção $\xi \in \eta$, respectivamente. O operador *B*, que relaciona os deslocamentos nodais ao campo de deslocamentos relativos do elemento, é:

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0\\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}$$
(2)

Onde h_i , $i = 1, \dots, 4$, são as funções de forma dadas por:

$$h_1 = h_4 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \tag{3}$$

$$h_2 = h_3 = \frac{1}{2}(1+\xi) \tag{4}$$

Usualmente, as tensões são avaliadas em função das deformações; entretanto, no caso das tensões na interface, as mesmas são determinadas em função dos deslocamentos relativos. O vetor de deslocamentos relativos (Δw) do elemento é determinado através da seguinte relação (BUENO, 1999):

$$\Delta w = Bu \tag{5}$$

Sendo **D** a matriz de propriedades do material, considerando que o elemento de interface de linha não tem dimensão na direção η e que a espessura e é constante ao longo do comprimento do mesmo, a matriz de rigidez **K** é dada por:

$$\boldsymbol{K} = e \int_{\boldsymbol{\xi}=-1}^{\boldsymbol{\xi}=-1} \boldsymbol{B}^{T} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}$$
(6)

Onde *L* é o comprimento do elemento. A matriz constitutiva **D** é dada por:

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} K_S & 0\\ 0 & K_0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Onde K_s e K_o denotam as componentes de rigidez horizontal (rigidez tangencial) e vertical (rigidez à tração), respectivamente.

No cálculo das componentes de rigidez da matriz **D**, podem-se considerar os fenômenos de amolecimento – linear, bilinear ou exponencial - no modelo constitutivo.

O modelo de amolecimento linear despreza os efeitos coesivos tangenciais e simplifica a curva de rigidez à tração, considerando que o material perde a resistência desde o início, conforme é mostrado na Figura 4a. A matriz **D** pode ser escrita na forma (BUENO, 1999):

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_0' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w \le w_c \to K_0' = K_0 \left(\frac{w_c - w}{w_c} \right) \\ w > w_c \to K_0' = 0 \end{cases}$$
(8)

Onde w_c é o deslocamento relativo crítico a partir do qual não há transmissão de esforços entre as faces da fissura, K_0 é a rigidez à tração inicial, e w é a abertura entre os nós do elemento de interface normal às faces da fissura.

A abertura da fissura crítica (w_c), no caso de amolecimento linear, é obtida a partir da energia de fraturamento (G_f) e é dada por (BUENO, 1999):

$$w_c = \frac{2G_F}{\sigma_U} \tag{9}$$

Onde σ_u é a tensão última de tração do material. Esse modelo está de acordo com os princípios da Mecânica da Fratura, uma vez que a área limitada pela curva tensão transmitida através da fissura *versus* abertura da fissura ($\sigma x w$) é igual à energia de fratura do material (G_t).

O modelo constitutivo de amolecimento exponencial é caracterizado pela curva na qual a rigidez à tração decresce exponencialmente em relação ao deslocamento relativo. Nesse modelo é desprezada a contribuição da componente de rigidez tangencial (Figura 4b). A matriz **D** pode ser escrita por (BUENO, 1999):

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_0' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w \le w_c \to K_0' = K_0 e^{-\theta w} \\ w > w_c \to K_0' = 0 \end{cases}$$
(10)

Onde θ é o coeficiente de amolecimento exponencial. A energia de fraturamento (G_f) para amolecimento exponencial pode ser obtida integrando-se a lei constitutiva e variando-se a abertura da fissura de 0 a ∞ , obtendo-se (BUENO, 1999):

$$G_f = \frac{\sigma_u}{\Theta} \tag{11}$$

O modelo constitutivo bilinear é caracterizado por uma curva com duas inclinações diferentes. Considera-se que o material perde resistência desde o início da solicitação, conforme é mostrado na Figura 4c. A matriz **D** pode ser escrita na forma (BUENO, 1999):

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_0' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} w \le w_1 \to K_0' = K_0 + \frac{(K_1 - K_0)w}{w_1} \\ w_1 < w \le w_c \to K_0' = \frac{K_1(w - w_c)}{w_1 - w_c} \\ w > w_c \to K_0' = 0 \end{cases}$$
(12)



Figura 4 – Modelos constitutivos: (a) amolecimento linear; (b) amolecimento exponencial; e (c) amolecimento bilinear. Fonte: PALIGA *et al.* (2007).

No caso de amolecimento bilinear, a abertura crítica de fissura w_c é obtida por (BUENO, 1999):

$$w_c = \frac{2G_F}{\sigma_U} - w_1 - \frac{2\sigma_U}{\sigma_1} \tag{13}$$

Onde σ_1 é a tensão de tração do material para a abertura igual a w_1 .

2.2 Modelo constitutivo para o concreto

O modelo de dano proposto por MAZARS (1984) tem por base algumas evidências experimentais observadas em ensaios uniaxiais de corpo de prova em concreto, tendo por hipóteses fundamentais (PITUBA, 1998):

- localmente o dano é devido a extensões (alongamentos) evidenciadas por sinais positivos, ao menos um deles, das componentes de deformação principal ($\varepsilon_i > 0$);

- o dano é representado por uma variável escalar $D \in [0,1]$, cuja evolução ocorre quando um valor de referência para a 'deformação equivalente' é superado;

- considera-se, portanto, que o dano seja isótropo, embora análises experimentais mostrem que o dano conduz, em geral, a uma anisotropia do concreto (o qual pode ser considerado inicialmente como isótropo); e

- o concreto danificado comporta-se como meio elástico. Portanto, deformações permanentes evidenciadas experimentalmente numa situação de descarregamento são desprezadas.

A relação constitutiva é dada por (TIAGO et al., 2002):

$$\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{I})\boldsymbol{C}^{\mathbf{0}} \tag{14}$$

Onde *I* é o tensor identidade e C^{o} é o tensor constitutivo elástico do material íntegro. O estado de extensão é localmente caracterizado por uma deformação equivalente ($\tilde{\epsilon}$), que é expressa por (PITUBA; PROENÇA, 2005):

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_3 \rangle_+^2} \tag{15}$$

Onde ε_i , i = 1,...,3, são componentes de deformação principal, e $\langle \varepsilon_i \rangle_+$, i = 1,...,3, são as partes positivas definidas por:

$$\langle \epsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2}(\epsilon_i + |\epsilon_i|)$$
 (16)

Nesse modelo, adota-se que o dano se inicia quando a deformação equivalente atinge um valor de deformação de referência ε_{d0} , determinado em ensaios de tração uniaxial em correspondência à tensão máxima (Figura 5).



Figura 5 – Diagrama tensão-deformação proposto por MAZARS (1984). Fonte: GUELLO (2002).

O concreto, em relação aos modos de ruptura, apresenta um comportamento distinto a tensões de tração e compressão. A ruptura do concreto por esforços de tração é ocasionada pela

formação de fissuras e consequente perda de resistência normal à direção da fissura. Quanto à ruína na compressão, o concreto apresenta um comportamento que pode ser considerado como plástico, que é o esmagamento ocasionado pela superação da coesão interna por efeito da tensão de cisalhamento caracterizada por grande quantidade de microfissuras (LEONEL *et al.*, 2003).

Considerando-se um carregamento continuamente crescente ou radial, das curvas tensãodeformação obtidas em ensaios uniaxiais de tração e compressão, podem ser determinadas explicitamente as variáveis de dano $D_T e D_C$ da seguinte forma, respectivamente:

$$D_T(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{(B_T \tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}}$$
(17)

$$D_{\mathcal{C}}(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_{\mathcal{C}})}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_{\mathcal{C}}}{e^{(B_{\mathcal{C}}\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}}$$
(18)

Onde $A_T \in B_T$ são parâmetros característicos do material em tração uniaxial, $A_C \in B_C$ são parâmetros do material em compressão uniaxial, e ε_{d0} é a deformação elástica limite. Os subindices $T \in C$ significam tração e compressão, respectivamente.

Para estados complexos de tensão, a variável de dano pode ser determinada por uma combinação linear de D_T e D_C mediante a seguinte expressão (PITUBA; PROENÇA, 2005):

$$D = \alpha_T D_T(\tilde{\varepsilon}) + \alpha_C D_c(\tilde{\varepsilon}), \quad \alpha_T + \alpha_C = 1$$
(19)

Onde os coeficientes α_T e α_C assumem valores no intervalo fechado [0,1], e representam a contribuição de solicitações à tração e à compressão para o estado local de extensão.

3 **RESULTADOS**

3.1 Problema 1

Este problema foi adaptado de MAZARS e PIJAUDIER-CABOT (1989). O problema consiste de um tirante armado de 70 cm de comprimento e seção transversal retangular (10 x 10) cm², com uma barra de aço com I = 490,87 mm⁴ localizada no centróide da seção (Figura 6). Uma força de tração P = 18,667 KN é aplicada na extremidade livre do tirante. Considera-se uma descontinuidade transversal (fissura inicial) no concreto na parte central do tirante. Ao longo dessa descontinuidade são colocados elementos de interface de linha com amolecimento linear (Figura 7), garantido assim a transmissão de esforços entre as duas partes.



Figura 6 – Geometria do tirante adaptado. Fonte: GUELLO (2002).

Na análise estrutural, foi utilizado o modelo de dano de Mazars e considerado o Estado Plano de Tensões. Com relação à interface entre o concreto e o aço, considerou-se perfeita aderência. Os parâmetros materiais do concreto e do aço são dados na Tabela 1. Os parâmetros da interface foram adotados conforme D'ÁVILA (2003).

Para a discretização do problema, foram considerados 291 elementos planos lineares isoparamétricos: 261 para simular o concreto e 30 para simular a barra de aço. Para simular a

descontinuidade foram utilizados 9 elementos de interface de linha. Nas simulações efetuadas com esse modelo, utilizou-se o método de Newton-Raphson e controle de carga. A geometria simétrica do tirante permitiu a modelagem de metade do tirante. O incremento de carga utilizado foi tomado igual a 1,2445 KN. O erro máximo admitido no final de cada incremento foi de 0,1%.

Concreto	Aço	Interface		
E = 30 GPa				
v = 0,2		$G_{a} = 4.87 \ 10^{-4} \ \text{KN/cm}$		
$A_{\rm T} = 0.8$	E = 200 GPa	$K_{f} = 4.87 \text{ for } \text{KV/cm}^{2}$		
$B_{\rm T} = 20000$	v = 0,2	w = 0.00616 cm		
$A_{\rm C} = 1,4$		$\sigma_{\rm c} = 0,00010 {\rm cm}^2$		
$B_{\rm C} = 1850$		$O_u = 0,138$ KN/CIIF		
$\varepsilon_{\rm d0} = 10 \ 10^{-5}$				

Tabela 1 – Parâmetros materiais do modelo estrutural

O mapa da distribuição do dano é mostrado na Figura 8. Nota-se, com a aplicação da carga, a formação de novas fissuras transversais ao eixo do tirante e paralelas à existente, bem como fissuras no entorno da barra. Não houve o arrancamento da barra de aço.



Figura 7 – Modelo constitutivo de amolecimento linear para a fissura.

De fato, em peças de concreto armado tracionadas ocorre um esmagamento relativo entre a armadura e o concreto adjacente, sempre que as deformações de ambos tenham valores diferenciados. Esse esmagamento decorre, principalmente, do esmagamento do concreto em frente às saliências da barra da armadura (D'ÁVILA, 2003).

As fissuras perpendiculares ao eixo da peça se desenvolvem caso a tensão no concreto excede a resistência à tração, não somente no entorno da barra de aço, mas em toda a seção transversal. Essas fissuras são, basicamente, devidas à tensão de tração provenientes da transferência de tensões do aço para o concreto através da aderência.

As curvas deslocamento máximo *versus* incremento de carga obtidas do modelo estrutural proposto, de MAZARS e PIJAUDIER-CABOT (1989) e de GUELLO (2002) são apresentadas na Figura 9. Em relação aos resultados obtidos, verificou-se que a curva obtida da simulação com o modelo proposto ficou próxima às curvas obtidas dos modelos numéricos desses autores. Um aspecto importante a ser evidenciado nesse modelo é que os resultados são sensíveis quando se varia o valor ε_{d0} , uma vez que altera o ponto de surgimento do dano e, consequentemente, o mapa da distribuição do mesmo na peça.



Figura 8 – Distribuição do dano no concreto na metade do tirante com uma fissura prévia.



Figura 9 – Evolução do deslocamento máximo ux versus incremento de carga.

3.2 Problema 2

A simulação numérica do processo de fraturamento é uma alternativa bastante econômica e rápida de se obter a distribuição dos esforços em uma estrutura com fissuras e avaliar sua segurança. Neste problema, avalia-se a capacidade da modelagem numérica proposta, baseada na formulação de elementos finitos, em predizer o processo de fraturamento. Para tal, considera-se uma viga biapoiada de concreto simples, com seção transversal (10 x 50) cm² e sujeita a uma carga concentrada P = 7,5 KN aplicada no meio do vão. Nessa viga há uma descontinuidade (fissura inicial) de comprimento a = H/W e alinhada à carga (Figura 10). Este exemplo numérico foi adaptado do trabalho de Bueno (1999). Os parâmetros materiais e geométricos do problema são dados na Tabela 2.



Figura 10 – Esquema estrutural da viga biapoiada. Fonte: BUENO (1999).

Na discretização, foram considerados 308 elementos planos lineares isoparamétricos para simular o concreto, e 2 elementos de interface de linha para simular a fissura inicial. Para o problema bidimensional, considerou-se o Estado Plano de Tensão. Nas simulações efetuadas com esse modelo, utilizou-se o método de Newton-Raphson e controle de carga. O incremento de carga utilizado foi tomado igual a 0,375 KN. O erro máximo admitido no final de cada incremento foi de 0,1%.

Para o concreto, considerou-se o modelo constitutivo de dano de Mazars; e o comportamento da fissura foi representado pelo modelo constitutivo de amolecimento linear (Figura 7). Os parâmetros da interface foram adotados conforme D'ÁVILA (2003).

Tabela 2 – Parametros	s materiais e ge	emétricos do modelo estrutural.

Parâmetros materiais		Parâmatras geomátricas
Concreto	Interface	Farametros geometricos
E = 30 GPa		
v = 0,2	$G_f = 4,87 \ 10^{-4} \ \text{KN/cm}$	H = 0.5 m
$A_T = 0.8$	$K_0 = 0,158 \text{ KN/cm}^2$	$W = 1 \mathrm{m}$
$B_T = 20000$	$K_s = 0$	L = 2m
$A_{C} = 1,4$	$w_c = 0,00616 \text{ cm}$	a = 0.5 m
$B_C = 1850$	$\sigma_u = 0,158 \text{ KN/cm}^2$	b = 0.1 m
$\varepsilon_{d0} = 0,7 10^{-5}$		

Na Figura 11 é mostrado o mapa da distribuição do dano na peça. O acúmulo de microfissuras e desagregações entre partículas próximas à extremidade da fissura ocorre devido à concentração de tensões na região próxima a mesma, promovendo a evolução do processo de fraturamento. Com o aumento do incremento de carga, a fissura se propaga na mesma direção da já existente a partir da extremidade superior, ficando conforme ao modo I de fraturamento (a fissura se propaga no plano por abertura normal à face da mesma).



Na Figura 12, é apresentada a curva deslocamento máximo u_y versus incremento de carga P obtida do modelo estrutural proposto.



Figura 12 – Evolução do deslocamento máximo u_v versus incremento de carga.

Nas Figuras 9 e 12, vê-se que houve quebra da curva-resposta obtida do modelo estrutural proposto no decorrer da simulação. Essa instabilidade numérica ocorre quando começam surgir regiões na peça com material danificado, isto é, quando o dano *D*, avaliado nos pontos de Gauss do elemento finito, assume valor maior que 0, ocasionando, assim, a diminuição da rigidez no ponto correspondente.

Os autores GUELLO e BITTENCOURT (2002) sugerem limitar o valor do dano *D* para que as deformações na viga não se tornem excessivas com aumento do incremento de carga. Contudo, tal restrição não foi considerada neste exemplo.

Para problemas de ponto limite, ao aplicar-se o método de Newton-Raphson com controle de carga, a matriz de rigidez tende a singularizar nas proximidades desse ponto em sua trajetória ascendente. Uma alternativa para detectar e ultrapassar o ponto limite é a utilização de métodos de solução associados ao método Newton-Raphson, como por exemplo, o método de Comprimento de Arco. Esse método apresenta um controle concomitante de carga e deslocamento através do conceito de comprimento de arco (RAMM, 1981).

Ademais, no modelo constitutivo para simular a fissura é desprezada a contribuição da componente de rigidez tangencial (K_s). Essa simplificação pode resultar em singularidades e instabilidades na análise numérica, uma vez que o movimento relativo tangencial fica completamente sem restrição.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta um estudo do acoplamento de teorias - Mecânica do Dano e Mecânica da Fratura - para a simulação dos fenômenos relacionados ao comportamento do material concreto. A análise estrutural de peças de concreto armado com fissura inicial, por meio do elemento de interface de linha – para simular a fissura - juntamente com o modelo de dano de Mazars, mostrouse satisfatória do ponto de vista qualitativo.

No primeiro problema, a modelagem proposta produziu um mapa da distribuição do dano com a formação de fissuras perpendiculares ao eixo do tirante e paralelas entre si. Se o carregamento é incrementado além daquele que causou a primeira geração de fissuras, novas fissuras perpendiculares ao eixo da peça poderão se formar, até que uma nova configuração de fissuras seja estabelecida. Os resultados ficaram conforme com os obtidos por D'ÁVILA (2003).

A modelagem numérica proposta conseguiu predizer a propagação de uma fissura préexistente localizada no centro de uma viga biapoiada de concreto simples (problema 2). Essa metodologia apresenta a vantagem de não requerer o uso de técnicas de reconstrução da malha de elementos finitos. Em geral, modelos discretos necessitam de técnicas sofisticadas e onerosas computacionalmente de reconstrução da malha para capturar a propagação de fissuras ao longo do processo de carga.

No entanto, a aplicação conjunta de tais modelos em situações práticas fica prejudicada pela identificação experimental dos parâmetros contidos nas leis de evolução das variáveis de dano e da fratura. Segundo PITUBA E PROENÇA (2005), o modelo de MAZARS (1984) pode ser estendido para sua aplicação em situações mais próximas da realidade, desde que sejam incorporados recursos como: a plastificação das armaduras, localização de deformações permanentes e a consideração da interação entre o concreto e a armadura.

Como continuidade dessa pesquisa, pretende-se, além das sugestões desses autores, implementar computacionalmente novos modelos constitutivos de amolecimento para simular a fratura no concreto, bem como outros modelos numérico-matemáticos baseados na Mecânica do Dano Contínuo, possibilitanto assim análises de estruturas de concreto armado mais realísticas.

Em adição, análises numéricas com outros tipos de elementos finitos de maior ordem e refinamento de malha são necessárias, de maneira a realizar um estudo da influência da malha (convergência) na resposta do modelo quanto à distribuição de dano na peça – possibilidade de surgimento de novas fissuras.

Acredita-se que a aplicação de modelos constitutivos que consideram o acoplamento dessas teorias apresenta grande potencial em projetos para o cálculo de carga de colapso e identificação de todo o mecanismo, na verificação do comportamento de elementos sob fadiga, e na análise de estruturas em concreto armado sujeitas a cargas provenientes de sismos, além da verificação da deformabilidade das estruturas em serviço.

5 REFERÊNCIAS

ÁLVARES, M. S. **Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e Plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado**. Tese (Doutorado) -Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, São Carlos, 1999.

AURICH, M. **Simulação computacional do comportamento do concreto nas primeiras idades**. Tese (doutorado) – Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotecnica, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

BUENO, E. M. R. **Simulação bidimensional de fraturamento coesivo por meio do método dos elementos finitos**. Dissertação (Mestrado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

D'ÁVILA, V. M. R. Estudo sobre modelos de fissuração de peças de concreto armado via método dos elementos finitos. Tese (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

GUELLO, G. A. **Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano**. Dissertação (Mestrado), Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

GUELLO, G. A.; BITTENCOURT, T. N. Simulação Computacional de Estruturas de Concreto por meio da Mecânica do Dano. **Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP**, São Paulo, v. 0202, n. 1, p. 1-12, 2002.

LEMAITRE, J. A course on damage mechanics. Springer Verlag, 1996.

LEONEL, E. D.; RIBEIRO, G. O.; PAULA, F. A. Simulação Numérica de Estruturas de Concreto Armado por Meio do MEF/ANSYS. In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, 2003.

MAZARS, J. Aplication de la mécanique de l'endommagement au comportament non lineare et à la rupture du béton de structure. Thése de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris, 1984.

MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. Continuum damage theory: application to concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 115, n. 2, p. 345-365, 1989.

PALIGA, C. M.; CAMPOS FILHO, A.; REAL, M. V. Finite element model for numerical analysis of strengthened reinforced concrete structures. **IBRACON Structural Journal**, v. 3, n. 2, p. 177-200, 2007.

PITUBA, J. J. C. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na Mecânica do Dano Contínuo. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 7, n. 23, p. 33-60, 2005.

RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. **Euro-US-Worshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics**, Ruhr Universitat Bochum, pp. 68-89, Springer, Berlin, 1981.

SCHELLEKENS, J. C. J. Interface Elements in Finite Elements Analysis. TNO-BI-90-165, 1990.

TIAGO, C. M.; LEITÃO, V. M. A.; ROSCA, V. Análise de problemas unidimensionais de mecânica do dano com funções de base radial. J.M. Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor e G. Bugeda, Editor, **Métodos Numéricos en Ingeniería V**, Artes Gráficas Torres S.A., 2002.