

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE DE CASCAS ABATIDAS

Eduardo Toledo de Lima Junior¹ & Wilson Sergio Venturini²

Resumo

O presente trabalho trata da análise numérica de cascas abatidas a partir do Método dos Elementos de Contorno (MEC). A formulação é desenvolvida a partir do acoplamento entre as equações integrais dos problemas de flexão de placas delgadas e de estado plano de tensão. As integrais sobre o domínio são avaliadas com aproximação das variáveis sobre células triangulares. A validação do modelo desenvolvido é feita com base em resultados analíticos, além de valores obtidos com outros modelos do MEC e do método dos elementos finitos.

Palavras-chave: Mecânica das estruturas. Método dos Elementos de Contorno. Cascas abatidas. Integrais de domínio.

BEM FORMULATION FOR SHALLOW SHELL ANALYSIS

Abstract

The present work deals with the numerical analysis of shallow shells using Boundary Element Method (BEM). The formulation is developed by coupling integral equations of plate bending and plane stress elasticity. In the implemented scheme, the boundary terms are evaluated with analytical and numerical processes of integration. In the case of domain integrals, a semi-analytical calculation procedure is applied on discrete cells. The validation of developed computational model is made with results from other works, obtained by use of BEM or finite element method, besides analytical solutions.

Keywords: Structural mechanics. Boundary Element Method. Shallow shells. Domain integrals.

1 INTRODUÇÃO

Cascas abatidas são elementos estruturais amplamente empregados em vários setores produtivos, notem-se os painéis utilizados em carenagens de veículos nas indústrias aeronáutica, mecânica e naval, além de produtos da construção civil, especialmente estruturas de cobertura.

Newton & Tottenham (1968) apresentaram a primeira aplicação do método dos elementos de contorno ao problema de cascas abatidas, com um método semi-direto baseado na decomposição da equação governante de 4ª ordem em uma de 2ª ordem. A obtenção de soluções fundamentais para o problema foi objeto de estudo de alguns pesquisadores. Lu & Huang (1991, 1992) deduziram a solução fundamental para cascas abatidas com superfície média quadrática, considerando cisalhamento. Dentre outros trabalhos, também trataram dessas deduções Matsui & Matsuoka (1978) e Lei et al. (1995). A aplicação direta do MEC implica na necessidade de existência das soluções fundamentais, as quais, nos problemas de casca, resultam significativamente complexas.

Desta forma, um outro tipo de aproximação foi desenvolvido, o chamado *domain-boundary element method* (DBEM), sendo apresentado inicialmente por Forbes & Robinson (1969) na análise

¹ Mestre em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, edut@sc.usp.br

² Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, venturin@sc.usp.br

estática de cascas abatidas. Zhang & Atluri (1986) estenderam o método à análise dinâmica, com base no método dos resíduos ponderados. Com auxílio do teorema da reciprocidade, Providakis & Beskos (1991) formularam o método para problemas com vibrações. Mostrou-se a possibilidade de análise não-linear geométrica em Lin & Long (1996). A principal qualidade do DBEM é a simplicidade das soluções fundamentais requeridas, quando comparado com a aplicação direta da solução fundamental de cascas. Porém, deve-se destacar que devido aos termos de curvatura presentes nas equações de equilíbrio surgem integrais de domínio, as quais demandam um tratamento custoso.

Com filosofia similar à utilizada no DBEM, Dirgantara & Aliabadi (1999) propuseram uma nova formulação, feita com base no acoplamento das equações integrais para flexão de placas e das equações integrais para o problema de estado plano de tensão, para analisar cascas com dupla curvatura, considerando cisalhamento. Wen et al. (2000^a, 2000^b) apresentaram uma formulação, também acoplada, com base na teoria de cascas abatidas, onde os deslocamentos de membrana e as deflexões e rotações de placa foram interpretados com funções radiais. As integrais de domínio são tratadas com a técnica de reciprocidade dual.

Em 2002, Wen et al. consideraram as cascas com enrijecedores, os quais foram modelados pela teoria de vigas curvas. Dirgantara & Aliabadi (2003) introduziram não linearidade geométrica no problema de casca abatida com dupla curvatura.

Propõe-se aqui uma formulação do MEC, deduzida a partir do teorema da reciprocidade de Betti, com base no acoplamento das equações integrais dos problemas de flexão de Kirchhoff e de estado plano de tensão. O contorno é discretizado em elementos lineares isoparamétricos, e células triangulares de aproximação linear são utilizadas para avaliar os termos de domínio.

2 FORMULAÇÃO BÁSICA

2.1 Cascas delgadas abatidas

Define-se por casca o elemento estrutural curvo dotado de uma dimensão significativamente pequena, em relação às outras duas dimensões e aos raios principais de curvatura, e submetido aos efeitos de flexão e membrana. O efeito de flexão é semelhante ao sofrido por uma placa, enquanto que a parcela de membrana está ligada a deformações do plano médio da casca nesta mesma superfície. O local dos pontos equidistantes das duas superfícies que delimitam a casca é chamada superfície média, sobre a qual fazem-se as principais suposições e análises.

Sendo R_i o raio de curvatura da casca referente à direção i , definem-se as curvaturas principais ao longo das direções coordenadas

$$K_{11} = \frac{1}{R_1}; \quad K_{22} = \frac{1}{R_2} \quad (1)$$

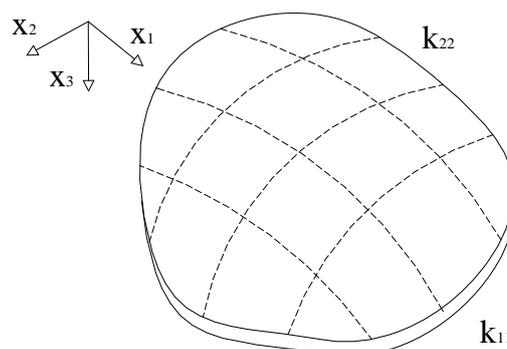


Figura 1 – Casca com curvaturas principais indicadas.

As cascas podem ser classificadas em delgadas ou espessas, com base na relação entre sua espessura h e o raio de curvatura R . Segundo Novozhilov (1964), a esbeltez da casca pode ser definida pela inequidade:

$$\frac{h}{R} \leq \frac{1}{20} \quad (2)$$

Admite-se uma casca, com superfície média definida por:

$$x_3 = x_3(x_1, x_2) \quad (3)$$

esta pode ser considerada abatida se, para os pontos da superfície média, verificar-se o regime de pequenas curvaturas, ou seja

$$\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 \ll 1, \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2 \ll 1 \quad (4)$$

A formulação completa para as cascas delgadas em geral, bem como as considerações que fundamentam a hipótese de abatimento, podem ser vistas em Novozhilov (1964).

2.1.1 Equacionamento básico

Considere-se que a casca possui superfície média quadrática, dada por:

$$x_3 = -\frac{1}{2}(K_{11}x_1^2 + K_{22}x_2^2) \quad (5)$$

O equacionamento de equilíbrio da casca é escrito a seguir,

$$N_{\alpha\beta,\beta} + q_\alpha = 0 \quad (6)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} - K_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta} + q_3 = 0 \quad (7)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (8)$$

sendo $N_{\alpha\beta}$, Q_α , $M_{\alpha\beta}$ as resultantes dos esforços normal, cortante e fletor respectivamente. As cargas de volume são representadas por q_α .

Visando apresentar de forma mais concisa a formulação, tomam-se u_α e w como sendo os deslocamentos nas direções 1, 2 e 3, respectivamente.

As componentes de deformação são expressas em função dos deslocamentos da superfície média, como segue:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + 2K_{\alpha\beta}w] \quad (9)$$

Considerando a teoria de Kirchhoff-Love, as resultantes de esforços em termos de deslocamentos, escritas para o estado plano de tensão, valem

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{2}B\left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu}u_{\gamma,\gamma}\delta_{\alpha\beta}\right) + B[(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\phi\phi}\delta_{\alpha\beta}]w \quad (10)$$

$$Q_\alpha = -D(w_{,\gamma\beta}) \quad (11)$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{2} D \left(w_{,\alpha\beta} + w_{,\beta\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (12)$$

sendo a rigidez de membrana B definida a partir do módulo elástico E e da espessura t da casca:

$$B = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \quad (13)$$

Derivando-se (10) em relação a β e substituindo na primeira equação de equilíbrio, obtém-se

$$\frac{1-\nu}{2} B \left(u_{\alpha,\beta\beta} + u_{\beta,\alpha\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma\beta} \delta_{\alpha\beta} \right) + \overline{q}_\alpha^m = 0 \quad (14)$$

Verifica-se que a primeira parcela, a menos de uma força de volume q_α , corresponde ao equilíbrio do problema isolado de membrana. Define-se ainda um termo de forças equivalentes:

$$\overline{q}_\alpha^m = q_\alpha + B \left[(1-\nu) K_{\alpha\beta} + \nu K_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta} \right] w_{,\beta} \quad (15)$$

Deriva-se a equação (8) em relação a α ,

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - Q_{\alpha,\alpha} = 0 \quad (16)$$

a fim de incorporar o valor de $Q_{\alpha,\alpha}$ dado em (7), resultando:

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - K_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + q_3 = 0 \quad (17)$$

Substituindo as expressões das resultantes em termos de deslocamentos, pode-se reescrever a expressão acima, como segue:

$$\frac{1-\nu}{2} D \left(w_{,\alpha\alpha\beta\beta} + w_{,\beta\alpha\alpha\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \right) + \overline{q}_3^f = 0 \quad (18)$$

as forças equivalentes são dadas, para o caso de flexão, por:

$$\overline{q}_3^f = q_3 - K_{\alpha\beta} B \left\{ \frac{(1-\nu)}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \nu u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + \left[(1-\nu) K_{\alpha\beta} + \nu K_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta} \right] w \right\} \quad (19)$$

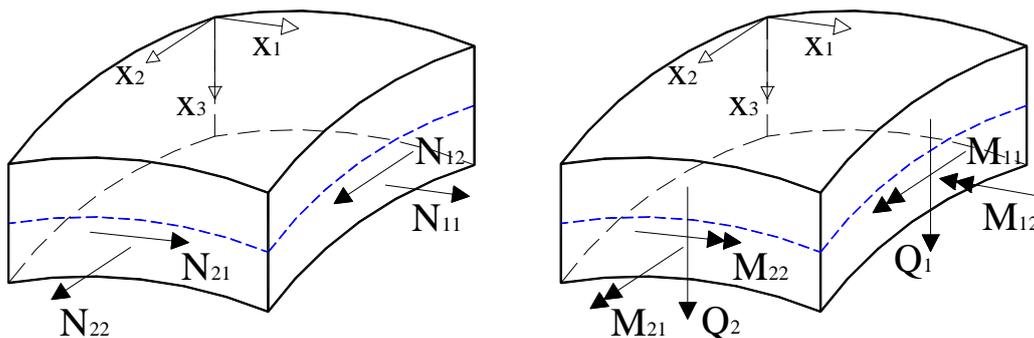


Figura 2 – Esforços de membrana e flexão atuantes na casca.

Pode-se verificar que os termos de forças equivalentes promovem o acoplamento dos problemas de membrana e flexão, os quais definem o comportamento da casca.

2.1.2 Formulação integral acoplada

Para o problema isolado de estado plano de tensão, a equação integral de deslocamento para pontos do contorno é escrita da forma:

$$C_{\alpha\beta} u_{\beta}(S) = \int_{\Gamma} P_{\beta}(Q) u_{\alpha\beta}^*(S, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{\alpha\beta}^*(S, Q) u_{\beta}(Q) d\Gamma - \int_{\Omega} u_{\alpha\beta}^*(S, q) q_{\alpha}(q) d\Omega \quad (20)$$

sendo $u_{\alpha\beta}^*(S, Q)$ e $P_{\alpha\beta}^*(S, Q)$ as soluções em deslocamento e força de contorno do problema no estado fundamental. Estas soluções fundamentais são definidas por:

$$u_{ik}^*(s, q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[-(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ik} + r_i r_{,k} \right] \quad (21)$$

$$P_{ik}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)r^{\alpha}} \left\{ \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + \beta r_{,i} r_{,j} \right] r_{,n} - (1-2\nu) (r_{,i} \eta_j - r_{,j} \eta_i) \right\}$$

Para a equação do regime de membrana deve-se observar que a tensão $\sigma_{\alpha\beta}$, representada na equação (10), a menos da multiplicação da espessura da casca, apresenta-se em dois termos: um primeiro que corresponde ao comportamento puramente de membrana, e um segundo associado à correção de rigidez imposta pelo acoplamento com o regime de flexão, como segue:

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{2} B \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + B \left[(1-\nu) K_{\alpha\beta} + \nu K_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta} \right] w \quad (22)$$

$$= N_{\alpha\beta}^m + N_{\alpha\beta}^b$$

Aplicando-se o teorema da reciprocidade de Betti à equação de equilíbrio de membrana da casca (6), obtém-se

$$\int_{\Omega} \sigma_{\beta\gamma}^m(q) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^*(s, q) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{\beta\gamma}^b(q) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{\beta\gamma}(q) \sigma_{\alpha\beta\gamma}^*(s, q) d\Omega \quad (23)$$

Após o desenvolvimento da expressão acima, a equação integral válida em pontos do contorno resulta da forma

$$C_{\alpha\beta} u_{\beta}(S) = \int_{\Gamma} P_{\beta}(Q) u_{\alpha\beta}^*(S, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{\alpha\beta}^*(S, Q) u_{\beta}(Q) d\Gamma -$$

$$B \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta}^*(S, q) \left[(1-\nu) k_{\beta\gamma} + \nu k_{\phi\phi} \delta_{\beta\gamma} \right] w \eta_{\gamma}(q) d\Gamma + \quad (24)$$

$$B \int_{\Omega} u_{\alpha\beta}^*(S, q) \left[(1-\nu) k_{\beta\gamma} + \nu k_{\phi\phi} \delta_{\beta\gamma} \right] w_{,\gamma}(q) d\Omega + \int_{\Omega} u_{\alpha\beta}^*(S, q) q_{\alpha}(q) d\Omega$$

onde percebe-se sua relação com a equação do problema isolado.

Já os deslocamentos num ponto de contorno de uma placa delgada são dados, em forma integral, como segue:

$$\begin{aligned}
C(S)w(S) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q)w^*(S, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q)w(Q) \\
& - \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(S, Q)w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} q_3(q)w^*(S, q)d\Omega
\end{aligned} \tag{25}$$

na qual as soluções fundamentais são dadas pelas expressões:

$$w^*(S, Q) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln(r) - \frac{1}{2} \right) \tag{26}$$

$$\frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial n} = \frac{r \ln(r)}{4\pi D} r_{,i} \eta_i \tag{27}$$

$$M_n^*(S, Q) = -\frac{1}{4\pi} \left\{ (1+\nu) \ln(r) + (1-\nu) (r_{,i} \eta_i)^2 + \nu \right\} \tag{28}$$

$$M_{ns}^*(S, Q) = -\frac{1}{4\pi} \left[(1-\nu) (r_{,i} \eta_i) (r_{,k} s_k) \right] \tag{29}$$

$$V_n^*(S, Q) = \frac{r_{,i} \eta_i}{4\pi r} \left[2(1-\nu) (r_{,k} s_k)^2 - 3 + \nu \right] \tag{30}$$

A reação de canto R_c , necessária à manutenção do equilíbrio na teoria de flexão de Kirchhoff, é definida como sendo a diferença entre os momentos volventes dos elementos anterior e posterior a um canto c :

$$R_c^* = \left[M_{ns}^{*p}(s, Q) - M_{ns}^{*a}(s, Q) \right]_c \tag{31}$$

Reescrevendo a equação (25), introduzindo-se o termo de acoplamento, obtém-se:

$$\begin{aligned}
C(S)w(S) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q)w^*(S, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q)w(Q) \\
& - \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(S, Q)w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \overline{q}_3^f(q)w^*(S, q)d\Omega
\end{aligned} \tag{32}$$

A substituição de \overline{q}_3^f em (32) leva ao resultado a seguir.

$$\begin{aligned}
C(S)w(S) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q)w^*(S, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q)w(Q) \\
& - \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(S, Q)w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} q_3(q)w^*(S, q)d\Omega \\
& - \int_{\Omega} K_{\alpha\beta}(q)N_{\alpha\beta}(q)w^*(S, q)d\Omega
\end{aligned} \tag{33}$$

A equação integral dos esforços de membrana $N_{\alpha\epsilon}$ ou das tensões $\sigma_{\alpha\epsilon}$ pode ser obtida com a substituição da equação (24), adaptada para pontos internos, na Lei de Hooke, como segue:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\varepsilon}(s) = & -\int_{\Gamma} S_{\alpha\beta\varepsilon}(s, Q) u_{\beta}(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{\alpha\beta\varepsilon}(s, Q) P_{\beta}(Q) d\Gamma + \\
 & \int_{\Omega} D_{\alpha\beta\varepsilon}(s, q) q_{\beta}(q) d\Omega - B \int_{\Omega} D_{\alpha\beta\varepsilon}(s, q) \left[(1-\nu) k_{\beta\gamma, \gamma} + \nu k_{\phi\phi, \gamma} \delta_{\beta\gamma} \right] w \eta_{\gamma}(q) d\Omega + \\
 & B \int_{\Omega} D_{\alpha\beta\varepsilon}(s, q) \left[(1-\nu) k_{\beta\gamma, \gamma} + \nu k_{\phi\phi, \gamma} \delta_{\beta\gamma} \right] w_{, \gamma}(q) d\Omega
 \end{aligned} \quad (34)$$

É válido afirmar que os esforços $N_{\alpha\varepsilon}$ são iguais às tensões ao nível da superfície média multiplicadas pela espessura da casca.

$$N_{\alpha\varepsilon}(s) = t \sigma_{\alpha\varepsilon}(s) \quad (35)$$

É ainda de interesse obter a representação integral dos deslocamentos de flexão para pontos internos.

$$\begin{aligned}
 w(s) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) + V_n(Q) w^*(s, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(s, Q) w(Q) \\
 & - \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} q_3(q) w^*(s, q) d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} K_{\alpha\beta}(q) N_{\alpha\beta}(q) w^*(s, q) d\Omega
 \end{aligned} \quad (36)$$

As equações (24), (33), (34) e (36) compõem um sistema de equações determinado que permite a obtenção dos valores de interesse.

Apresentam-se a seguir as expressões algébricas das equações supracitadas, na ordem em que foram definidas anteriormente. Vale destacar que a somatória $K_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}$ é representada pela variável \overline{N}_m .

$$\begin{aligned}
 [H_m] \{U_m\} &= [G_m] \{P_m\} - [S_m] \{U_b\} + [R_m] \{W_f\} + \{F_m\} \\
 [H_b] \{U_b\} &= [G_b] \{P_b\} + [J_b] \{\overline{N}_m\} + \{F_b\} \\
 \{\overline{N}_m\} &= -[H'_m] \{U_m\} + [G'_m] \{P_m\} - [S'_m] \{U_b\} + [Q_m] \{W_b\} + \{F'_m\} \\
 \{W_b\} &= -[H'_b] \{U_b\} + [G'_b] \{P_f\} + [J'_f] \{\overline{N}_m\} + \{F'_b\}
 \end{aligned} \quad (37)$$

A representação matricial do sistema é dada a seguir:

$$\begin{bmatrix} H_m & -R_m & S_m & 0 \\ 0 & 0 & H_b & -J_b \\ H'_m & -Q_m & S'_m & I \\ 0 & I & H'_b & -J'_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_b \\ U_b \\ \overline{N}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_m & 0 \\ 0 & G_b \\ G'_m & 0 \\ 0 & G'_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_m \\ P_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_m \\ F_b \\ F'_m \\ F'_b \end{Bmatrix} \quad (38)$$

2.2 Tratamento das integrais de domínio

As integrais sobre o domínio que constam na formulação apresentada podem ser subdivididas em duas classes básicas. Na primeira o núcleo da integral, que consiste em uma solução fundamental ou suas derivadas, multiplica um termo \overline{T} de valor conhecido sobre o domínio, como é o caso das

integrais de forças de corpo. O procedimento aqui apresentado objetiva transferir a integral do domínio para o seu contorno, de forma que a mesma possa ser avaliada de forma mais simples.

Admitindo-se a existência de uma primitiva da solução fundamental X^* :

$$\nabla^2 L = X^* \quad (39)$$

Pode-se escrever integral da forma:

$$\int_{\Omega} X^* \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 L \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) \bar{T} \, d\Omega \quad (40)$$

Fazendo-se uma integração por partes, têm-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial L}{\partial y} \eta_y \right) \bar{T} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (41)$$

Uma segunda integração por partes leva a

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial L}{\partial y} \eta_y \right) \bar{T} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \eta_y \right) L \, d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) L \, d\Omega \quad (42)$$

Por fim, a integral original no domínio resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 L \cdot \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial L}{\partial n} \right) \bar{T} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \right) L \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla^2 \bar{T} \cdot L \, d\Omega \quad (43)$$

Vale destacar que podem-se obter sucessivas primitivas, a fim de anular a integral de domínio que resta no último termo do desenvolvimento. Obtendo-se uma primeira primitiva, e ao fim de duas integrações, como mostrado acima, é possível tratar integrais cujo termo \bar{T} possua distribuição constante ou linear.

As integrais de domínio em que o termo multiplicado pela solução fundamental é incógnita do sistema, podem ser avaliadas por diversas metodologias. Adota-se aqui um procedimento de cálculo semi-analítico dessas integrais, a partir da definição da variável de interesse em regiões discretas do domínio.

Considere uma porção do domínio Ω , discretizada em células Ω_m , como ilustrado a seguir.

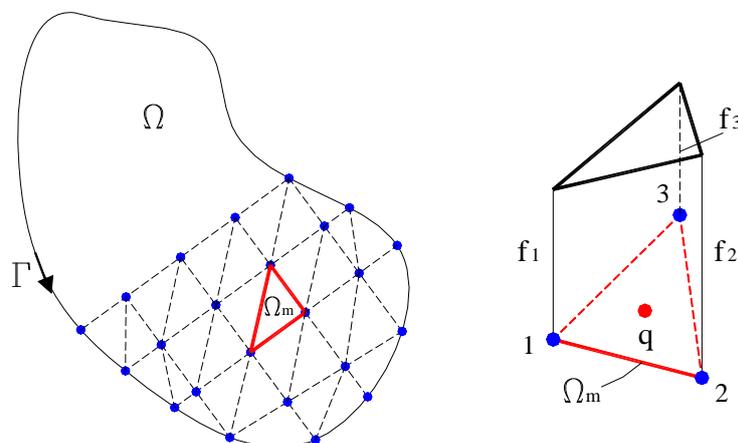


Figura 3 – Divisão do domínio em células; exemplo de aproximação linear.

Aproximando o valor de $f(q)$ em cada célula por uma função $\phi_1(q)$, têm-se:

$$f_m(q) = \phi_1(q)f_1^m \quad (44)$$

Desta forma, uma integral que contém o termo em $f(q)$ pode ser escrita como um somatório das integrais de cada célula, por exemplo:

$$\int_{\Omega} u^*(S, q) f(q) d\Omega = \sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_m} u^*(S, q) \phi_1(q) d\Omega_m f_1^m \quad (45)$$

A integração de um termo de domínio sobre as células resulta numa matriz de coeficientes, que representa a influência dos valores f_1 . Substituindo-se os f_1 obtém-se as influências dos deslocamentos e suas derivadas.

No presente trabalho, utilizam-se células planas triangulares, e aproximação linear para as variáveis.

A função de forma linear é dada por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2A_c} (\alpha_0 + \varphi_0 x + \gamma_0 y) \quad (46)$$

Sendo A_c a área da célula, e os termos α_0 , φ_0 e γ_0 definidos por notação cíclica, com $i, j, k = 1 \dots 3$, como segue:

$$\alpha_0 = x_j y_k - x_k y_j; \quad \varphi_0 = y_j - y_k; \quad \gamma_0 = x_k - x_j \quad (47)$$

O procedimento semi-analítico é brevemente descrito a seguir. Inicialmente, admita-se uma integral de domínio, escrita como um somatório de integrais sobre células:

$$\int_{\Omega} u^* f d\Omega = \sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_m} u^* \phi_1 d\Omega_m f_1^m \quad (48)$$

escreve-se a expressão em coordenadas polares, obtendo

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\theta} \int_r u^* \phi_1 r dr d\theta f_1^m \quad (49)$$

com integração analítica na variável r , chega-se à equação abaixo.

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\theta} \Psi d\theta f_1^m \quad (50)$$

uma expressão equivalente, representada sobre o contorno Γ_m de uma célula é

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Gamma_m} \Psi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_m \right) f_1^m \quad (51)$$

em função das coordenadas homogêneas do contorno da célula, obtém-se

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Gamma_m} |J_p| \Psi \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\xi_m f_1^m \quad (52)$$

esta expressão é integrada numericamente, por quadratura de Gauss.

3 APLICAÇÕES DO MODELO

A metodologia aqui apresentada foi implementada em linguagem MATLAB®, dando origem ao programa SSPLBE – Shallow Shell Problem with Linear Boundary Element. Inicialmente, apresentam-se exemplos de placas, a fim de validar a implementação para o problema desacoplado de flexão. Problemas envolvendo cascas abatidas são mostrados a seguir.

3.1 Placa apoiada em dois lados ortogonais e engastada nos outros dois

Trata-se de uma placa quadrada, com 2 m de lado e 6 cm de espessura, sob um carregamento de 400 N/m². Admita-se módulo de elasticidade de 2,05 x 10¹¹ N/m² e coeficiente de Poisson nulo. O problema é analisado em Bares (1969). Utilizam-se 24 pontos de integração, e diferentes discretizações no contorno.

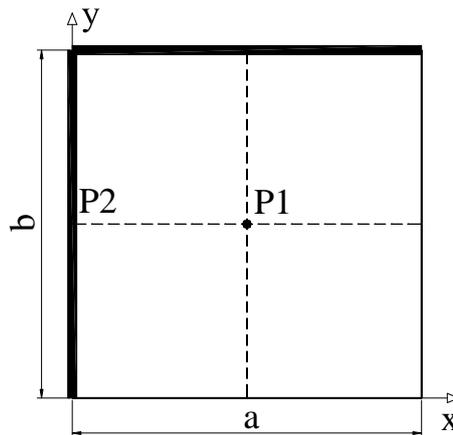


Figura 4 – Placa apoiada/engastada com carga uniforme.

A tabela a seguir apresenta os resultados obtidos nos pontos destacados, confrontados com os de valores de referência.

Tabela 1 – Valores de deflexão e momentos nos pontos especificados (N, m)

Método	W P1	M _{xx} P1	M _{yy} P1	M _n P2	
Bares(1969)	3,642 x 10 ⁻⁶	37,44	37,44	-108,32	
Presente Estudo	16 elem.	3,654 x 10 ⁻⁶	37,47	37,47	-115,22
	32 elem.	3,649 x 10 ⁻⁶	37,46	37,46	-109,74
	64 elem.	3,649 x 10 ⁻⁶	37,46	37,46	-108,72

Nas figuras 5 e 6 apresentam-se alguns diagramas traçados com resultados do programa, representando as distribuições dos campos de deslocamento transversal e momentos sobre a superfície média da placa.

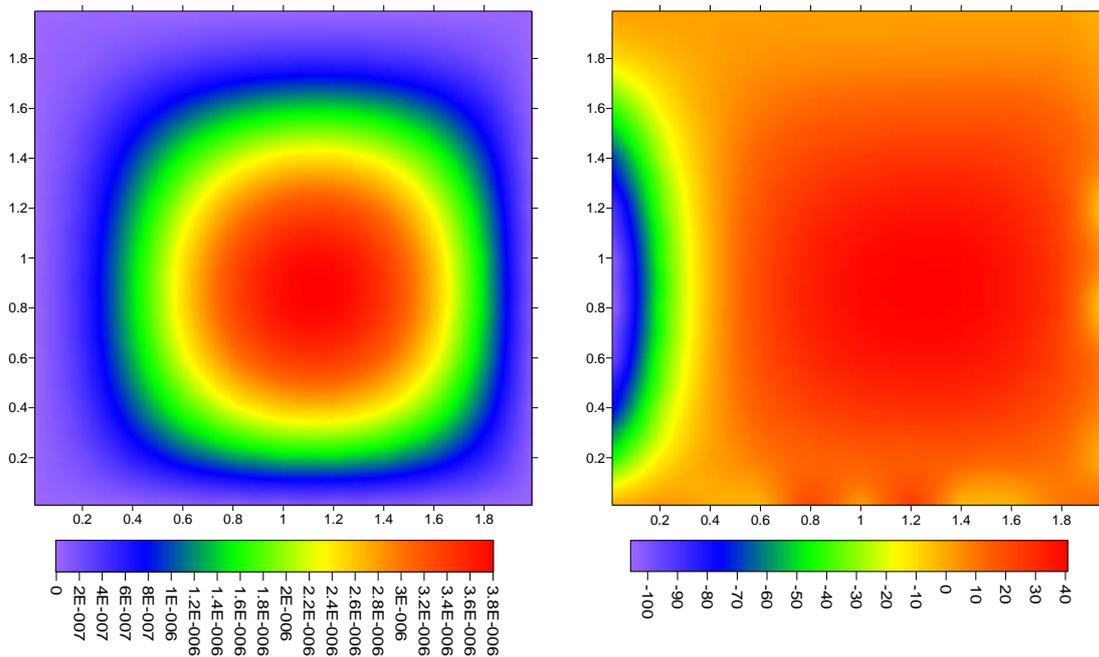


Figura 5 – Deflexão (m); Momento M_{xx} (N, m).

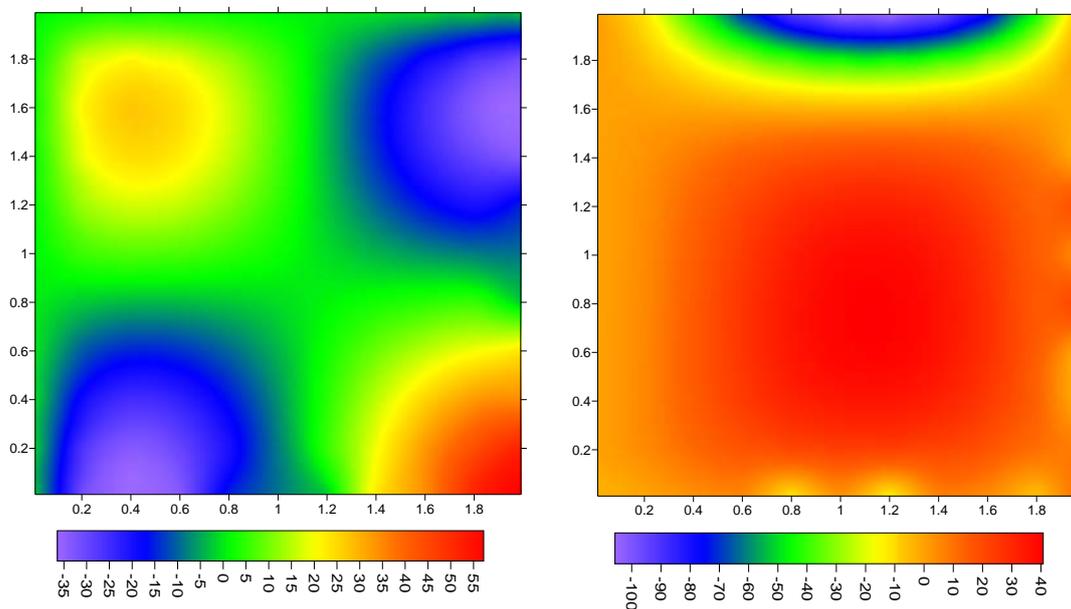


Figura 6 – Momento M_{xy} (N, m); Momento M_{yy} (N, m).

3.2 Casca cilíndrica de base quadrada, engastada e livre

Admite-se uma casca de curvatura cilíndrica, com raio de 100 m, e base quadrada de dimensões unitárias (Fig. 7). O carregamento transversal vale $q_3 = 0,006853 \text{ N/m}^2$, o módulo de

elasticidade longitudinal é de 1000 N/m^2 e o coeficiente de Poisson é igual a $0,3$. A espessura da casca é $h = 0,1 \text{ m}$.

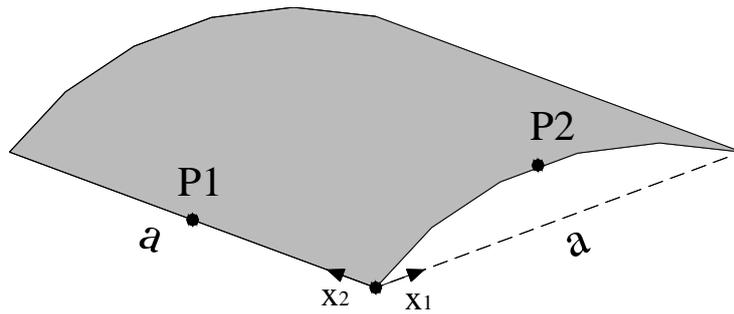


Figura 7 – Casca Cilíndrica, engastada nas bordas retas e livre nas bordas curvas.

Na análise com uso do programa desenvolvido, adotam-se 40 elementos de contorno, e 32 células sobre o domínio, como ilustrado em 8.

Os resultados são validados por um pacote comercial, baseado no método dos elementos finitos. Para tanto, utilizam-se 400 elementos do tipo quadrilateral isoparamétrico com aproximação quadrática, o qual é bastante indicado para o tipo de problema em análise, segundo instruções do programa.

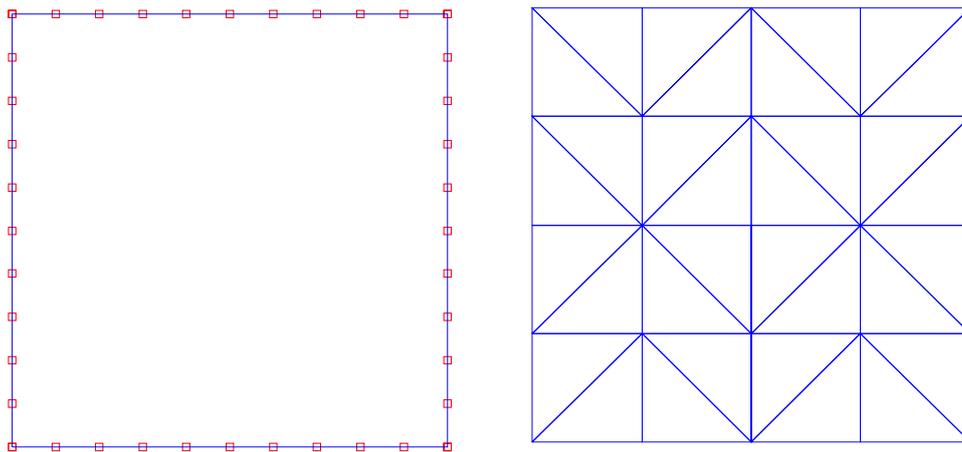


Figura 8 – Discretizações utilizadas no contorno e no domínio.

Alguns valores obtidos com a presente proposta são confrontados com os resultados de referência, como mostra a tabela 2. O diagrama de deslocamento transversal é apresentado a seguir.

Tabela 2 – Deflexão no ponto central e forças de contorno (N, m)

Método	W_0	$N_n \text{ P2}$	$N_n \text{ P1}$	$Q_n \text{ P1}$	$M_n \text{ P1}$
Refer. MEF	$2,30 \times 10^{-4}$	$2,70 \times 10^{-5}$	$1,20 \times 10^{-4}$	$3,12 \times 10^{-4}$	$-4,67 \times 10^{-4}$
Presente Estudo	$2,15 \times 10^{-4}$	$2,77 \times 10^{-5}$	$1,25 \times 10^{-4}$	$3,35 \times 10^{-4}$	$-4,70 \times 10^{-4}$

Verifica-se uma razoável conformidade entre os valores propostos e os resultados do método dos elementos finitos.

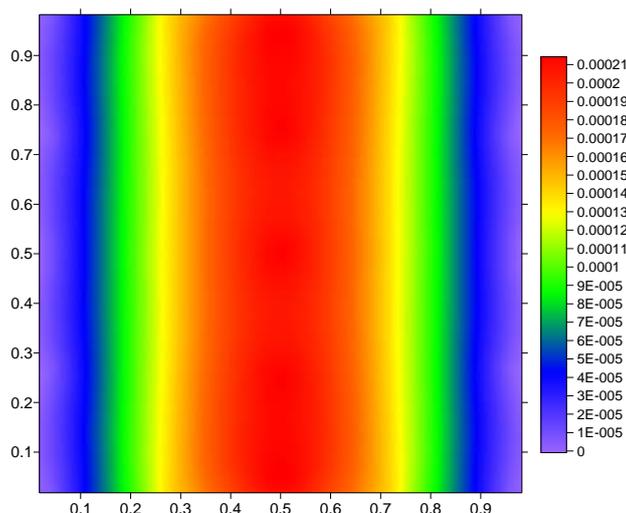


Figura 9 – Deslocamento transversal obtido com a proposta apresentada.

3.3 Casca esférica de base circular, engastada

Analisa-se neste exemplo uma casca em forma de cunha esférica, com 10 m de diâmetro, espessura de 0,01 m e raio de curvatura $R = 100$ m. As propriedades mecânicas e de carregamento valem: $E/q_3 = 2,1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ e $\nu = 0,3$. Considera-se a borda perfeitamente engastada, sendo as condições de contorno $u_i = 0$, $w = 0$, $w_{,i} = 0$.

A validação do exemplo é feita com base em dois trabalhos da literatura. Em Dirgantara & Aliabadi (1999), apresenta-se uma análise pelo método dos elementos de contorno, além resultados obtidos com uso de um programa comercial (SAP90), baseado em elementos finitos. Na formulação via MEC proposta no trabalho supracitado, a flexão é tratada pela Teoria de Reissner, e as integrais de domínio são computadas por aproximação sobre células quadrilaterais com geometria quadrática e aproximação constante para as variáveis. Ainda, utilizam-se elementos de contorno quadráticos isoparamétricos. Neste trabalho referenciado, utilizam-se 16 elementos de contorno e 81 células. A malha de elementos finitos utilizada possui 540 elementos. O segundo trabalho, Wen et al. (2000) utiliza o MEC para a análise do problema, com elementos quadráticos isoparamétricos na aproximação do contorno. As integrais de domínio são transformadas para o contorno através do método da reciprocidade dual (Nardini & Brebbia). Utiliza-se a Teoria de Reissner. O contorno é discretizado em 16 elementos, e 25 pontos são utilizados no mapeamento do domínio.

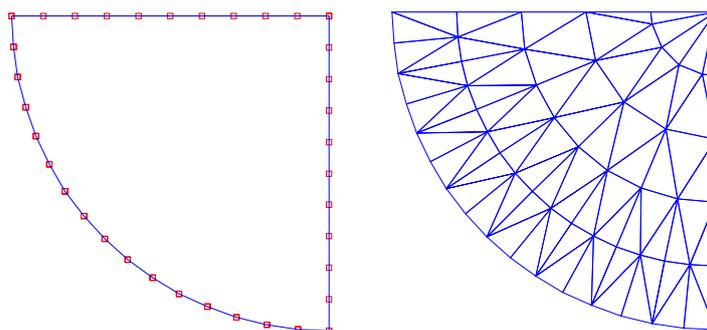


Figura 10 – Discretizações utilizadas no contorno e no domínio.

No presente trabalho, analisa-se apenas um quarto da estrutura, em razão da simetria. Utilizam-se 36 elementos de contorno e 82 células, como ilustrado na figura 10. A tabela 3 lista alguns resultados, tais como a deflexão no ponto central, e as forças no contorno.

Tabela 3 – Deflexão e forças no contorno da casca esférica (N, m)

Resultado	Presente	Refer. 1 MEC	Refer. 2 MEC	Refer. MEF
W_0	0,205	0,209	0,211	0,210
N_n	22,812	22,300	22,729	22,879
Q_n	1,667	1,386	1,429	-
M_n	1,463	1,499	1,507	1,492

Verifica-se uma razoável concordância dos valores aqui obtidos com os resultados de referência. Deve-se ressaltar que na modelagem de apenas um quarto da estrutura existe o inconveniente do canto livre, que pode levar à perturbações na solução em sua vizinhança.

4 CONCLUSÕES

Apresentou-se um modelo numérico para análise de cascas abatidas, o qual apresentou desempenho satisfatório numa validação feita com base em outros trabalhos e em resultados de programas comerciais consagrados, baseados no método dos elementos finitos.

5 AGRADECIMENTOS

Agradecemos à CAPES pelo apoio financeiro.

6 REFERÊNCIAS

BARES, R. **Tables pour le calcul des dalles et des parois**. Paris: Ed. Dunod, 1969.

DIRGANTARA, T.; ALIABADI, M. H. A new boundary element formulation for shear deformable shell analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, n. 9, p. 1257-1275, 1999.

DIRGANTARA, T.; ALIABADI, M. H. Non-linear fracture mechanics analysis of fuselage panels using BEM, **Advances In Fracture And Damage Mechanics: Key Engineering Materials**, v. 251, n. 2, p. 115-121, 2003.

FORBES, D. J.; ROBINSON, A. R. Numerical analysis of elastic plates and shallow shells by an integral equation method. **Structural Research Series Report**, n. 345, University of Illinois, 1969.

LEI, X. Y.; HUANG, M. K.; WANG, X. Analysis of the explicit fundamental solution of a shallow spherical shell involving shear deformation. **Applied Mathematical Modelling**, v. 19, p. 194-200, 1995.

LIMA JR. E. T. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de cascas abatidas**. 2006. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

LIN, J.; LONG, S. Geometrically nonlinear analysis of the shallow shell by the displacement-based boundary element formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 18, p. 63-70, 1996.

LU, P.; HUANG, M. Boundary element analysis of shallow shells involving shear deformation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 29, n. 10, p. 1273-1282, 1992.

LU, P.; HUANG, M.. Computation of the fundamental solution for shallow shells involving shear deformation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 28, n. 5, p. 631-645, 1991.

MATSUI T.; MATSUOKA O. The fundamental solution in the theory of shallow shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 14, p. 971- 986, 1978.

NEWTON, D. A.; TOTTENHAM, H. Boundary value problems in thin shallow shells of arbitrary plan form. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 2, p. 211- 223, 1968.

NOVOZHILOV, V. V. **The Theory of Thin Shells**. Groningen: Ed. Noordhoff, 1964.

PROVIDAKIS C. P.; BESKOS D. E. Free and forced vibration of shallow shells by boundary and interior elements. **Computational Methods in Applied Mechanical Engineering**, v. 92, n. 1, p. 55-74, 1991.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Boundary element analysis of reinforced shear deformable shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 54, n. 6, p. 789-808, 2002.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Plane stress and plate bending coupling in BEM analysis of shallow shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, n. 8, p. 1107-1125, 2000.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Application of dual reciprocity method to plates and shells. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, n. 7, p. 583-590, 2000.

ZHANG, J. D.; ATLURI S. N.. A boundary-interior element method for quasi static and transient response analysis of shallow shells. **Computers and Structures**, v. 24, p. 213-223, 1986.

