

## **MODELO PARA PROJETO ÓTIMO BASEADO EM CONFIABILIDADE: APLICAÇÃO A UMA VIGA EM CONCRETO ARMADO**

Caio Gorla Nogueira<sup>1</sup> & Wilson Sergio Venturini<sup>2</sup>

### **Resumo**

*Este trabalho apresenta um modelo para projeto ótimo baseado em confiabilidade com aplicação a uma viga hiperestática em concreto armado, a partir da minimização do custo total de uma viga, impondo-se o nível de segurança desejado. A falha é considerada pela violação do estado limite último de ruptura dos materiais nas seções mais solicitadas. O método de otimização utilizado é o Método dos Multiplicadores de Lagrange, no qual a formulação é apresentada analiticamente em termos das equações de equilíbrio para flexão, de compatibilidade e mais uma restrição dada em termos de confiabilidade. A análise de confiabilidade é realizada através do Método de Superfícies de Respostas combinado a um modelo mecânico não-linear, que obtém as respostas da estrutura em termos de forças de violação de estados limites. Os resultados mostram que o processo de otimização pode conduzir a mudanças significativas nos cenários de falha da estrutura, produzindo comportamentos diferentes comparado a estruturas projetadas pelos procedimentos-padrão utilizados atualmente.*

*Palavras-chave: Confiabilidade. Otimização. Concreto armado. Elementos finitos. Superfície de resposta.*

## **RELIABILITY-BASED DESIGN OPTIMIZATION: APPLICATION TO A REINFORCED CONCRETE BEAM**

### **Abstract**

*This paper presents a reliability-based optimization model with applications to a hyperstatic reinforced concrete beam, from the minimization of a beam total cost, imposing the safety level desired. Failure is considered by the violation of the ultimate limit state of material rupture at the most requested cross sections. The optimization problem is analytically formulated by the Lagrange Multipliers Method in terms of flexure equilibrium equations, compatibility and plus a reliability constraint. The reliability analysis is performed through the Response Surface Method coupled to a non-linear mechanical model, which obtains structural responses in terms of limit states violations forces. The results show optimization process may lead to important changes on the failure scenario of the structure. It may provide different behaviors when compared to structures designed by standard proceedings used today.*

*Keywords: Reliability. Optimization. Reinforced concrete. Finite elements. Response surface.*

## **1 INTRODUÇÃO**

Em um projeto estrutural, assim como em qualquer empreendimento de engenharia, procura-se a solução mais econômica e segura possível. Em termos matemáticos, a estrutura deve, durante

<sup>1</sup> Doutor em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, gorlanog@sc.usp.br

<sup>2</sup> Professor (*In Memoriam*) do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP.

toda sua vida útil, possuir recursos (resistências) superiores às demandas (ações). Com este intuito, a NBR 6118:2003 (Projeto de Estruturas de Concreto) e a NBR 8681:2003 (Ações e Segurança nas Estruturas), além de diversos códigos internacionais, definem uma série de restrições que se traduzem em critérios de segurança adotados para o projeto de estruturas. São os chamados estados limites. De acordo com essa abordagem, estados limites são os estágios a partir dos quais a estrutura apresenta desempenho inadequado às finalidades para as quais foi projetada. Assim, as estruturas são projetadas com o uso de coeficientes parciais de segurança que tem como objetivo suprir todas as incertezas devido a erros humanos, causas naturais e variabilidade dos materiais inerentes às variáveis de projeto. Entretanto, a metodologia atual baseada em coeficientes parciais de segurança não permite o conhecimento adequado dos níveis de segurança de um projeto ou de uma estrutura em serviço. Tal fato é de extrema importância, uma vez que a crescente evolução dos materiais estruturais faz com que as estruturas trabalhem cada vez mais próximas de seus limites. Aliado a esse quadro, não existem ainda normas que abordam o projeto e/ou verificação estrutural em termos totalmente probabilísticos, impossibilitando o conhecimento de suas probabilidades de falha.

Na tentativa de solucionar esses inconvenientes, a teoria da confiabilidade estrutural é empregada com o objetivo de calcular as probabilidades dos eventos que caracterizam uma falha. As variáveis de projeto são consideradas como aleatórias, com modelagem de suas incertezas por meio de distribuições de probabilidade. No âmbito da verificação da segurança estrutural, confiabilidade deve ser entendida como sendo a probabilidade de sobrevivência de um componente ou sistema estrutural, desde que utilizado de acordo com as especificações do projeto (Mohamed, 1996). A confiabilidade estrutural constitui-se, portanto, em uma teoria interessante para a análise da segurança das estruturas e alternativas de projeto, fornecendo uma medida mais precisa do grau de segurança frente aos estados limites, visto que se baseia na determinação de probabilidades de falha ou violação desses estados limites.

Com a utilização da confiabilidade estrutural e seus princípios estatísticos pode-se atingir a primeira meta de um projeto de engenharia: sistemas com maior segurança em função de um melhor conhecimento de seu comportamento probabilístico. Combinado a esse objetivo, o próximo passo é incorporar conceitos que permitam o projeto mais econômico respeitando a segurança especificada. É neste contexto que a otimização assume papel fundamental na concepção de um projeto de engenharia: o projeto ótimo. Portanto, na prática, procura-se a solução mais econômica que apresente uma probabilidade de falha que esteja de acordo com o especificado.

## 2 METODOLOGIA

Atualmente, diversos são os modelos existentes para modelar estruturas em concreto armado, diferenciando-se entre si, basicamente, pela quantidade de fenômenos reais que são considerados em suas formulações. Isso traduz a complexidade dos modelos matemáticos e suas leis de descrição, que podem muitas vezes trazer benefícios do ponto de vista de representatividade dos mecanismos de transferência de tensões, mas por outro lado podem acarretar sérios problemas numéricos e de tempo de processamento. Modelos mais simples como os de Ghali; Favre, 1986 e Debernardi, 1989 fundamentados em estados de deformação médios para o concreto e o aço entre fissuras são uma alternativa interessante. Teorias mais complexas que procuram representar o comportamento de perda de rigidez do concreto diante da fissuração, como é o caso da mecânica da fratura e do dano no contínuo tendem a ser mais precisas, embora consumam mais tempo de processamento em função do tipo de complexidade adotada (Lemaitre, 1992, Lemaitre; Chaboche, 1994, Scotta et al., 2001, Bazant, 2002; Nguyen; Korsunsky, 2008, Manzoli et al., 2008). Com relação ao aço, pelo seu comportamento homogêneo, os modelos formulados com base na teoria da plasticidade são bastante interessantes para representar o material (Owen; Hinton, 1980), uma vez que a plastificação após o escoamento e a ductilidade são características marcantes desse tipo de material.

Neste trabalho, foi utilizado o Método dos Elementos Finitos para vigas com abordagem convencional em deslocamentos. O comportamento não-linear do concreto foi representado pelo modelo de dano de Mazars, 1984. Já o aço foi tratado através de um modelo elastoplástico com encruamento isótropo positivo. Esses modelos foram incorporados a um elemento finito unidimensional de viga para resolução das estruturas em concreto armado. A resolução do problema não-linear foi feita a partir de um processo incremental-iterativo via algoritmo de Newton-Raphson com a utilização de matriz de rigidez tangente. Um procedimento de busca da força de violação do estado limite de ruptura dos materiais foi desenvolvido para obtenção do vetor de respostas necessário na análise de confiabilidade.

## Concreto

O concreto foi representado pelo modelo de dano de Mazars, 1984 que penaliza a rigidez do material a partir de uma variável escalar de dano. Esta variável tem como principal objetivo registrar a influência da evolução dos possíveis micro-defeitos ao longo do processo de carregamento. Assim, o modelo de dano é capaz de capturar o comportamento não-linear do concreto decorrente da evolução das fissuras ao longo do material. A Figura 1 ilustra o comportamento do concreto obtido com o modelo de dano tanto à tração quanto à compressão.

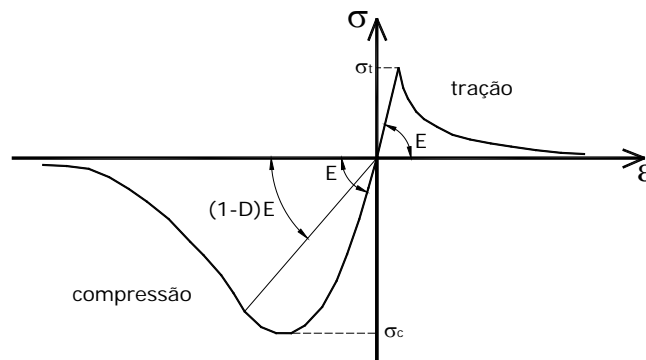


Figura 1 – Diagrama tensão x deformação do concreto.

A relação constitutiva do concreto expressa pelo modelo de dano é dada da seguinte forma:

$$\underline{\sigma} = (1 - D)\underline{D}_0 \underline{\varepsilon} \quad (1)$$

onde:  $D$  é a variável de dano que assume valores entre 0 e 1;  $\underline{D}_0$  é o tensor de propriedades elásticas do material.

O modelo de dano de Mazars define que a variável de dano é composta por uma parcela decorrente da tração e outra parcela decorrente da compressão. Assim, seu valor é obtido a partir da combinação das parcelas de dano à tração,  $D_T$  e à compressão,  $D_C$ , conforme segue:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (2)$$

onde:  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  são ponderadores calculados em função do estado de tensão nos pontos danificados da estrutura a partir do tipo de solitação. As variáveis  $D_T$  e  $D_C$  são, respectivamente, as variáveis de dano à tração e à compressão e podem ser calculadas por:

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0} \cdot (1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{\exp[B_T \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.a)$$

$$D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0} \cdot (1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{\exp[B_C \cdot (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (3.b)$$

onde:  $A_T$ ,  $B_T$ ,  $A_C$ ,  $B_C$  e  $\varepsilon_{d0}$  são os parâmetros numéricos do modelo de dano;  $\tilde{\varepsilon}$  corresponde à deformação equivalente, que é função do estado de deformações da estrutura, dada por:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (4)$$

com  $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2}(\varepsilon_i + |\varepsilon_i|)$ .

Os parâmetros  $\alpha_T$  e  $\alpha_C$  necessários para o cálculo da variável de dano podem ser obtidos por:

$$\alpha_T = \frac{\sum_i (\varepsilon_{Ti})_+}{\varepsilon_V^+} \quad (5.a)$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i (\varepsilon_{Ci})_+}{\varepsilon_V^+} \quad (5.b)$$

As componentes  $\varepsilon_{Ti}$  e  $\varepsilon_{Ci}$  são obtidas a partir das tensões principais assumindo o material intacto e  $\varepsilon_V^+$  é a variável representativa do estado local de alongamento do material, sendo definida de acordo com:

$$\varepsilon_V^+ = \sum_i (\varepsilon_{Ti})_+ + \sum_i (\varepsilon_{Ci})_+ \quad (6)$$

## Aço

Os modelos elastoplásticos não consideram diretamente perda de rigidez do material, como é o caso dos modelos de dano, mas sim o surgimento e acúmulo de deformações residuais permanentes (Proença, 1988). Após ser atingida a tensão de escoamento, o material no caso do modelo utilizado, sofre uma espécie de endurecimento, recuperando a capacidade de absorver as tensões, porém segundo uma nova relação de proporcionalidade até a ruptura. No modelo com encruamento isotrópico positivo, quando a tensão de escoamento é atingida, a superfície de plastificação é aumentada, de modo que a nova tensão de escoamento passa a ser definida pela tensão corrigida anterior, conforme Figura 2.

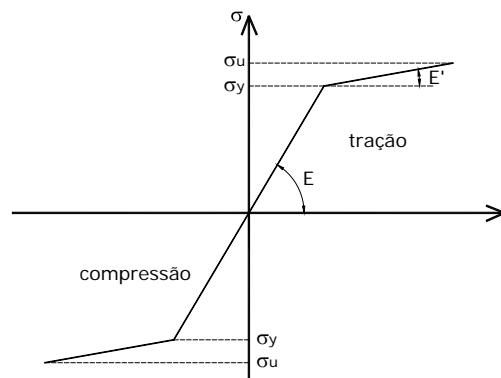


Figura 2 – Diagrama tensão x deformação do aço.

O algoritmo do modelo elastoplástico adotado, já na forma incremental, pode ser escrito da seguinte forma: a) previsão elástica de tensão; b) deformação no passo atual; c) critério de plastificação; d) condição de consistência; e) deformação plástica atual; f) lei de encruamento isótropo; g) variação da deformação plástica; h) módulo elastoplástico corrigido; i) tensão corrigida na camada de armadura. Essas etapas estão listadas abaixo com suas respectivas equações.

$$\sigma^{i+1} = E(\varepsilon^{i+1} - \varepsilon_p^{i+1}) \quad (7.a)$$

$$\varepsilon^{i+1} = \varepsilon^i + \Delta\varepsilon^i \quad (7.b)$$

$$f^{i+1} = \sigma^{i+1} - (\sigma_y + K\alpha^{i+1}) \leq 0 \quad (7.c)$$

$$\Delta\lambda f^{i+1} = 0 \quad (7.d)$$

$$\varepsilon_p^{i+1} = \varepsilon_p^i + \Delta\lambda \cdot \text{sign}(\sigma^{i+1}) \quad (7.e)$$

$$\text{sign} = \begin{cases} +1 \Leftrightarrow \sigma > 0 \\ -1 \Leftrightarrow \sigma < 0 \end{cases} \quad (7.f)$$

$$\alpha^{i+1} = \alpha^i + \Delta\lambda \quad (7.g)$$

$$\Delta\lambda = \frac{E \cdot \Delta\varepsilon^i \text{sign}(\sigma^i)}{(E + K)} \quad (7.h)$$

$$E_s = \frac{EK}{E + K} \quad (7.i)$$

$$\sigma^{i+1} = E_s \varepsilon^{i+1} \Rightarrow \Delta\lambda > 0 \quad (7.j)$$

onde:  $\sigma^{i+1}$  é a tensão no aço;  $E$  é o módulo de elasticidade do aço;  $\varepsilon^{i+1}$  é a deformação total;  $\varepsilon_p^{i+1}$  é a deformação plástica ou residual;  $\Delta\varepsilon^i$  é o incremento de deformação total obtido pelas relações de compatibilidade entre deslocamentos e deformações;  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento do aço;  $K$  é o módulo plástico de encruamento isótropo positivo do aço;  $\alpha^{i+1}$  é uma medida interna da deformação plástica;  $\Delta\lambda$  é a variação da deformação plástica.

### Algoritmo de busca da força de violação de estado limite

Um estado limite corresponde à fronteira entre o desempenho desejado e o indesejado da estrutura. Essa condição é formulada a partir de uma função matemática que define se a estrutura apresenta, para um determinado nível de carregamento, uma falha ou se está segura. Neste trabalho, o que caracteriza a falha da estrutura é a ruptura dos materiais que a compõem. Assim, o estado limite adotado corresponde ao estado de ruptura dos materiais, controlado pelas deformações limites de cada material, sendo -3,5‰ para o concreto comprimido e 10,0‰ para o aço tracionado. Portanto, a função de estado limite local fica definida em termos de cada material da seguinte forma:

$$G_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i,LIM} \quad (8)$$

onde:  $G$  é a função estado limite;  $\varepsilon$  é a máxima deformação no material  $i$  na seção transversal;  $\varepsilon_{LIM}$  corresponde aos valores limites de deformação de cada material.

A Figura 3 ilustra o fluxograma de obtenção da força de violação de estado limite. O procedimento consiste em dividir o incremento de força aplicado em  $n$  partes, uma vez que a deformação do material atingiu um dos valores limites. O novo incremento é aplicado sobre a estrutura no processo não-linear até atingir novamente uma deformação limite. Esse processo é repetido sucessivas vezes até uma determinada tolerância pré-estabelecida.

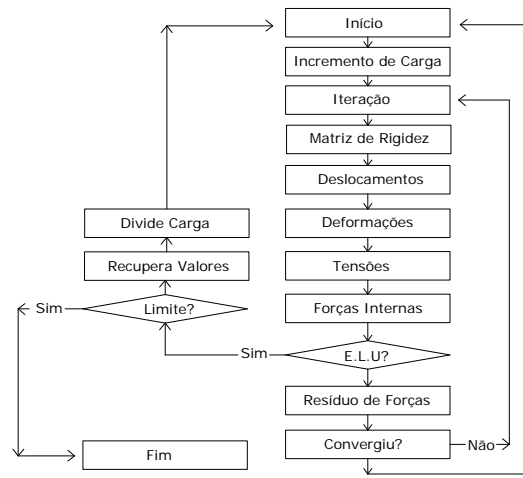


Figura 3 – Fluxograma de busca da condição de estado limite da estrutura.

### 3 DESENVOLVIMENTO

#### Teoria de confiabilidade

A teoria da confiabilidade busca avaliar as incertezas nas variáveis de projeto de forma mais consistente e considerar sua influência na segurança estrutural. Causa impacto à primeira vista, quando se fala que sempre haverá uma probabilidade não-nula de que uma estrutura venha a falhar. Essa condição é perfeitamente justificável, uma vez que a presença das incertezas nos parâmetros de resistência dos materiais e nas intensidades e posição dos carregamentos impossibilitam que uma determinada estrutura apresente segurança absoluta. Além disso, outras incertezas são inerentes à geometria dos elementos estruturais e posicionamento das armaduras, provocando também chances reais de ocorrência de uma falha. Cabe comentar nesse momento que falha não significa necessariamente o colapso estrutural, mas sim a presença de um comportamento não desejado desenvolvido pela estrutura. Portanto, o objetivo de análises de confiabilidade nada mais é do que determinar valores de probabilidades de violação de um determinado estado limite ou vários estados limites. Neste trabalho, quem fornece essa condição limite são as deformações últimas dos materiais, conforme já comentado acima.

Existem diversos métodos propostos na literatura para avaliação da confiabilidade, desde métodos de simulação, como o Monte Carlo, até métodos diretos como o FORM (First Order Reliability Method) e o SORM (Second Order Reliability Method). Cada um deles possui suas vantagens e desvantagens, sendo seu uso definido pelo tipo de problema. O método adotado neste trabalho baseia-se na construção de sucessivas superfícies de respostas para representar o estado limite, em combinação com o FORM, que aproxima a função de estado limite no ponto de projeto por um hiperplano (Lemaire, 1998, Soares et al., 2002, Neves et al. 2006).

As superfícies de resposta são aproximações polinomiais utilizadas para a busca do ponto de projeto, definido como sendo o ponto que contém o maior conteúdo de probabilidades. Assim, o objetivo desse tipo de análise é encontrar o ponto de projeto para cada estado limite considerado e, com isso, sua respectiva probabilidade de ocorrência. Inicialmente, são definidos valores

determinísticos baseados nas próprias estatísticas das variáveis aleatórias. Esses valores são dados por planos de experiência, fornecendo variações fixas de cada variável. Cada ponto do plano de experiência é então utilizado para obter a resposta mecânica da estrutura, que neste caso é dada pela força de violação do estado limite. A partir do vetor de respostas mecânicas e dos pontos definidos pelo plano, uma regressão via método dos mínimos quadrados é realizada, obtendo-se assim, os coeficientes do polinômio que representa a superfície do estado limite. Como o índice de confiabilidade,  $\beta$ , foi definido como sendo a menor distância entre a origem do espaço normal padrão e a função de estado limite (Hasofer; Lind, 1974), essas superfícies de resposta precisam ser construídas no espaço normal padrão, conforme Figura 4.

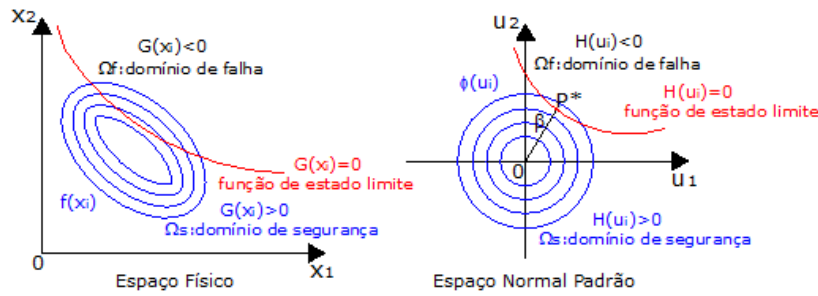


Figura 4 – Definição do problema no espaço físico e norma-padrão.

Os coeficientes do polinômio ficam definidos da seguinte forma:

$$\{A\} = \{P\}^{-1} \{V\} \quad (9.a)$$

$$[P] = \sum_{k=1}^{np} (\{X^k\} \{X^k\}^t) \quad (9.b)$$

$$\{V\} = \sum_{k=1}^{np} (R^k \{X^k\}) \quad (9.c)$$

$$\{X\}^t = \{1, x_1, \dots, x_n, x_1^2, \dots, x_n^2, x_1 x_2, \dots, x_{(n-1)} x_n\} \quad (9.d)$$

onde:  $np$  é o número de pontos do plano de experiência.

Finalmente, a função de estado limite, para o caso de duas variáveis aleatórias pode ser definida por:

$$G(X) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2^2 + a_4 x_2 - P_{appl} \quad (9.e)$$

$$H(U) = b_0 + b_1 u_1 + b_2 u_1^2 + b_3 u_2^2 + b_4 u_2 - 1 \quad (9.f)$$

O índice de confiabilidade é determinado a partir da equação de estado limite através da resolução do problema de otimização definido na Equação (10), conforme segue:

$$\beta = \min \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n u_i^2 \right)} \quad (10)$$

Sujeito a:  $H(U) \leq 0$ .

A solução do problema de otimização acima fornece o valor do índice de confiabilidade, as coordenadas,  $u_i^*$ , do ponto de projeto  $P^*$  e os co-senos diretores,  $\alpha_i$  que refletem uma medida da sensibilidade do índice de confiabilidade em relação às variáveis aleatórias consideradas. Entretanto essas informações somente são garantidas quando ocorre a convergência em direção a um mínimo global. O problema de otimização pode ser resolvido empregando-se diversas técnicas da literatura, tais como gradientes projetados, método de Newton, algoritmo de Abdo e Rackwitz, algoritmo de HLRF, etc. Dentre as diversas técnicas de otimização, adotou-se o algoritmo HLRF (Rackwitz; Fiessler, 1978).

A partir do índice de confiabilidade, calcula-se a probabilidade de falha pelo FORM, associada à violação do estado limite considerado de acordo com:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (11)$$

onde:  $\Phi(\bullet)$  é a distribuição acumulada de probabilidades.

## Otimização matemática

Em projetos estruturais, os elementos são dimensionados de acordo com uma série de regras específicas, com o objetivo de garantir a eles equilíbrio, durabilidade e segurança, para que possam assim, desempenhar as funções para as quais foram projetados. Essas regras são dadas por um conjunto de funções matemáticas. Assim, as técnicas de otimização podem ser empregadas para buscar valores extremos dessas funções, sendo, portanto, uma boa abordagem para a obtenção de estruturas mais econômicas.

Todo o problema de otimização precisa ser tratado mediante um conjunto de etapas específicas. Em primeiro lugar, é necessário que seja definido um objetivo, isto é, alguma medida quantitativa que seja capaz de representar o desempenho do sistema analisado. Em geral, no campo da otimização de seções transversais de elementos estruturais, esse objetivo é representado pelo custo ou peso da estrutura. O objetivo, ou o que se anseia do sistema, é representado por uma função matemática, de modo a computar um determinado número de características do sistema que influenciam seu desempenho. Essas características do sistema são as chamadas variáveis ou incógnitas que se desejam obter. Entretanto, em problemas de engenharia, existem limites para essas variáveis. Esses limites são, na verdade, restrições que as variáveis devem obedecer para que o sistema possa operar segundo o desejado e com o objetivo atingido. São problemas típicos de otimização em engenharia de estruturas, por exemplo, a obtenção das dimensões que garantem o mínimo peso de uma treliça, ou a disposição ótima dos apoios de um pavimento para que haja melhor distribuição de esforços, e até mesmo, cálculo das dimensões de seções transversais de elementos de concreto armado para que o custo seja mínimo. Assim, todo esse processo inicial de conhecimento do objetivo, da identificação das variáveis importantes e restrições que devem ser obedecidas constitui a chamada fase de modelagem de um problema de otimização. Certamente a fase de modelagem é uma das mais importantes em todo o processo, pois somente com a construção de um modelo adequado é que se torna possível representar o real desempenho de um sistema real (Nocedal; Wright, 1999).

Finalizada a etapa de modelagem, parte-se para a busca de um algoritmo que seja capaz de encontrar a solução do sistema. Matematicamente, a otimização resume-se à minimização ou maximização de uma função sujeita a restrições em suas variáveis. O problema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\min f(x) \quad (12)$$



$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} h_i(x) = 0 & i = 1 \dots n \\ g_j(x) \leq 0 & j = 1 \dots m \end{cases}$$

onde:  $f(x)$  é a função objetivo que se deseja extremar;  $h_i(x)$  são as restrições de igualdade;  $g_j(x)$  são as restrições de desigualdade;  $x$  é o vetor de incógnitas.

## Modelo para acoplamento entre otimização e confiabilidade

O modelo desenvolvido procura otimizar a seção transversal de um elemento linear fletido em concreto armado, acoplado à formulação uma restrição de confiabilidade. O modelo é dividido em duas etapas: na primeira, a otimização apresenta restrições somente de caráter mecânico; na segunda etapa, a função custo novamente é otimizada, porém sujeita a uma restrição em forma de superfície de confiabilidade. As variáveis otimizadas correspondem à altura da seção transversal e a área de armadura tracionada. Mais detalhes sobre o modelo podem ser vistos no trabalho de Nogueira, 2005.

Formulação para a primeira etapa:

Minimizar:

$$F(x_1, x_2, x_3) = b \cdot (x_1 + d') \cdot C_c + (b + 2x_1) \cdot C_f + (x_2 + x_3) \cdot \gamma_s \cdot C_s \quad (13.a)$$

Sujeito a:

$$K_1 \cdot x_1 + \sigma_{sc} \cdot x_3 - \sigma_s \cdot x_2 = 0$$

$$K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2 + \sigma_{sc} \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') - M_d = 0$$

$$\frac{x_2 + x_3}{b \cdot x_1} \leq \% \max \quad (13.b)$$

$$\frac{x_3}{x_2} \leq 0,5$$

onde:  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são, respectivamente, a altura útil da seção transversal, área de armadura tracionada e área de armadura comprimida;  $\gamma_s$  é a massa específica do aço no valor de 7500kg/m<sup>3</sup>;  $C_c$ ,  $C_f$  e  $C_s$  são, respectivamente, os custos dos materiais acrescidos de mão-de-obra para o concreto, fôrmas de madeira e aço para as armaduras;  $\sigma_s$  é a tensão na armadura tracionada;  $\sigma_{sc}$  é a tensão na armadura comprimida;  $d'$  é a distância entre a borda de concreto tracionada e o centro de gravidade da armadura de tração;  $M_d$  é o momento fletor solicitante;  $\%max$  é a quantidade máxima de armadura permitida na seção transversal;  $f_{cd}$  é a resistência à compressão de cálculo do concreto;  $\varepsilon_c$  é a deformação na fibra mais comprimida de concreto;  $\varepsilon_s$  é a deformação na armadura tracionada;  $b_w$  é a largura da seção transversal.

Os parâmetros  $K_1$  e  $K_2$  são constantes que reúnem os termos provenientes das equações de equilíbrio e de compatibilidade. São dados por:

$$K_1 = 0,8 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s} \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \quad (13.c)$$

$$K_2 = 1 - 0,4 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}$$

Após a obtenção do ponto ótimo na primeira etapa, este é adotado como o centro de um plano de experiência qualquer e variações nos parâmetros de otimização são feitas para a nova etapa do processo. Para cada ponto do plano de experiência, um índice de confiabilidade é obtido e, com isso,

constrói-se uma superfície de confiabilidade dada em função dos parâmetros de otimização e do índice de confiabilidade-alvo.

A segunda etapa corresponde à otimização com restrição em confiabilidade. Destaca-se que para a segunda etapa, a armadura comprimida é mantida constante no processo para facilitar a obtenção analítica da solução. Além disso, ao analisar a estrutura para o cálculo dos esforços solicitantes, o processo de otimização acaba compensando essa simplificação, pois busca sempre a solução equilibrada para a configuração dada.

Formulação para a segunda etapa:

Minimizar:

$$F(x_1, x_2) = b \cdot x_1 \cdot C_c + (b + 2x_1) \cdot C_f + (x_2 + c) \cdot \gamma_s \cdot C_s \quad (14.a)$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} K_1 \cdot (x_1 - d') + \sigma_{sc} \cdot c - \sigma_s \cdot x_2 &= 0 \\ \beta_0 - (a_0 + a_1 \cdot x_2 + a_2 \cdot x_2^2 + a_3 \cdot x_1 + a_4 \cdot x_1^2) &\leq 0 \end{aligned} \quad (14.b)$$

onde: os  $a_i$  são os coeficientes da superfície de confiabilidade;  $c$  corresponde ao valor da armadura comprimida adotada como constante;  $\beta_0$  é o índice de confiabilidade-alvo. É importante ressaltar que, nessa segunda etapa da otimização, a variável  $x_1$  não é mais a altura útil da seção, mas sim a altura total. Esse procedimento foi adotado para que a superfície de confiabilidade fosse determinada em função da altura total da seção transversal.

Da mesma forma, é possível diminuir o número de restrições de igualdade fazendo-se:

$$x_2 = \frac{K_1 \cdot (x_1 - d') + \sigma_{sc} \cdot c}{\sigma_s} \quad (15)$$

Assim, substituindo-se a Equação (15) na Equação (14), o problema fica definido somente em função da altura da seção transversal. O problema de otimização é resolvido com a aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange. Escreve-se o lagrangeano equivalente ao problema, deriva-se o lagrangeano em relação à altura da seção e, na seqüência, resolve-se o sistema de equações (Nogueira, 2005). A solução final é dada da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{-Z_2 \pm \sqrt{Z_2^2 - 4 \cdot Z_1 \cdot Z_3}}{2 \cdot Z_1} \quad (16.a)$$

Com:

$$\begin{aligned} Z_1 &= -a_2 K_1^2 - a_4 \sigma_s^2 \\ Z_2 &= -a_1 \sigma_s K_1 + 2a_2 K_1^2 d' - 2a_2 K_1 \sigma_{sc} c - a_3 \sigma_s^2 \\ Z_3 &= \beta_0 \sigma_s^2 - a_0 \sigma_s^2 + a_1 \sigma_s K_1 d' - a_1 \sigma_s \sigma_{sc} c - a_2 K_1^2 d'^2 + 2a_2 K_1 d' \sigma_{sc} c - a_2 \sigma_{sc}^2 c^2 \\ \lambda_1 &= \frac{-b C_c \sigma_s - 2 C_f \sigma_s - K_1 \gamma_s C_s}{\sigma_s (2 Z_1 x_1 + Z_2)} \end{aligned} \quad (16.b)$$

Ao se fixar a restrição em confiabilidade, ou seja, para chegar exatamente ao valor do índice de confiabilidade pré-fixado, é necessário que se faça um processo iterativo. Significa que ao final de uma iteração do modelo, o índice de confiabilidade pode resultar menor que o requerido ou até mesmo muito maior. Nesses casos, reinicia-se o processo somente a partir da segunda etapa, isto é, não é mais necessário fazer a otimização determinística. Dessa forma, o ponto ótimo obtido na

primeira iteração torna-se o centro do plano de experiência para a segunda iteração e assim sucessivamente até que o índice de confiabilidade requerido seja atingido com uma tolerância desejada. Portanto, a busca das dimensões da estrutura que resulte no índice de confiabilidade desejado requer esse processo iterativo.

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O modelo foi aplicado no projeto ótimo de uma viga hiperestática em concreto armado, com o objetivo de verificar a redistribuição de esforços e as possíveis mudanças no cenário de falha de uma estrutura otimizada. A estrutura foi discretizada em 16 elementos finitos e submetida a duas forças concentradas de 50kN cada uma (nós 5 e 13). São dois tramos com quatro metros de comprimento cada um e seção transversal de 15cm por  $h$ . A discretização e o detalhamento da viga estão mostrados na Figura 5.

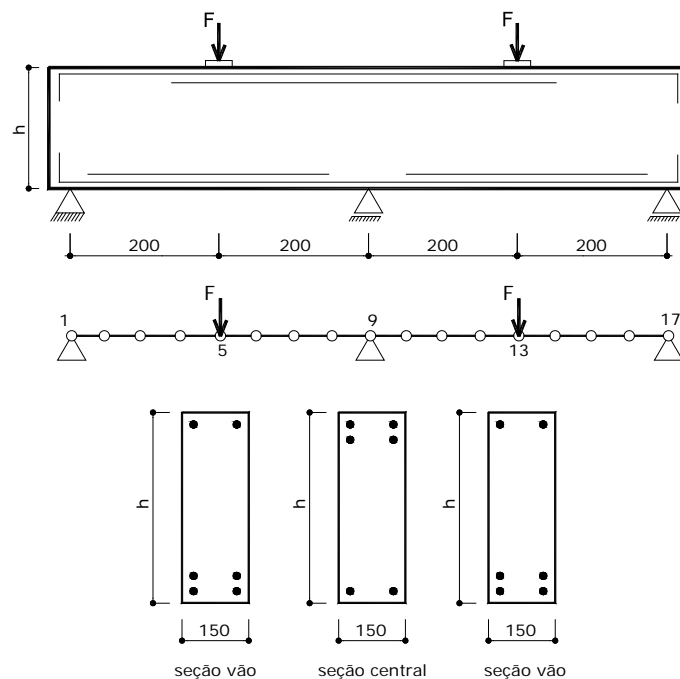


Figura 5 – Geometria, detalhamento e discretização da viga em estudo.

Para o modelo de otimização, adotou-se um concreto com  $f_{CK} = 23MPa$ , o que corresponde a uma resistência média à compressão de 30MPa e desvio-padrão de 4,2MPa. As armaduras foram simuladas com CA-50 e módulo de elasticidade longitudinal 210000MPa. A associação estatística para o aço foi feita considerando resistência média de 500MPa e desvio-padrão de 30MPa. Tanto o concreto quanto o aço foram adotados respeitando a distribuição normal de probabilidades. A verificação do estado limite último foi realizada pela comparação entre as deformações dos pontos de integração ao longo da altura das seções transversais e camadas de armadura com as deformações limites para o concreto comprimido (-3,5‰) e aço tracionado (10‰). A estrutura foi analisada em regime não-linear físico para o concreto e aço, através dos modelos de dano de Mazars e modelo elastoplástico com encruamento isótropo positivo, respectivamente. O modelo de dano foi calibrado para simular um concreto de 23MPa, resultando nos seguintes parâmetros:  $\varepsilon_{d0} = 0,000063$ ,  $A_T = 0,995$ ,  $B_T = 8000$ ,  $A_C = 0,88$  e  $B_C = 1347$ . Os demais dados do modelo de otimização foram adotados com os seguintes valores: distância da borda tracionada de concreto até o centro de

gravidade da armadura tracionada,  $d' = 3,0\text{cm}$ ; taxa máxima de armadura permitida de 4%; custo do concreto,  $C_c = 230,00\text{R}\$/\text{m}^3$ ; custo da madeira,  $C_f = 32,00\text{R}\$/\text{m}^2$ ; custo do aço,  $C_s = 2,80\text{R}\$/\text{kg}$ .

A Tabela 1 mostra o desempenho do modelo aplicado à viga hiperestática. Para este exemplo, o índice de confiabilidade-alvo foi de 3,9 para o primeiro modo de falha, isto é, falha por ruptura dos materiais na seção localizada no apoio central. Observa-se que não houve a convergência logo na primeira iteração do método, em função da redistribuição de esforços que ocorre nas estruturas hiperestáticas.

Tabela 1 – Dimensões ótimas da viga analisada e valores do índice de confiabilidade

Iteração	Apoio central (nó 9)		Vão (nós 5 e 13)		$\beta$
	h (cm)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	h (cm)	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	
1	32,11	5,78	32,11	3,92	7,102
2	25,45	6,44	25,45	5,78	5,096
3	23,64	6,00	23,64	6,19	4,278
4	23,06	5,86	23,06	6,34	3,908

Na primeira iteração, o índice de confiabilidade resultou em um valor elevado, indicando um alto nível de segurança para a estrutura. Este fato é justificável, uma vez que a armadura foi a principal responsável pela falha na estrutura, ou seja, a confiabilidade dependeu muito mais do aço do que do concreto. Assim, como o aço é um material produzido com elevado controle de qualidade, seu coeficiente de variação é baixo comparado com o concreto. Com isso, as forças últimas apresentaram baixo nível de dispersão, já que o aço foi o principal responsável pela segurança da estrutura. Já na última iteração, o comportamento geral da viga foi diferente. Para que o índice de confiabilidade se aproximasse do valor alvo, foi necessário diminuir a altura da seção transversal e, ao mesmo tempo, não aumentar a quantidade de armadura na seção do apoio central. Esta atitude fez com que as deformações na armadura dessa seção resultassem maiores do que as mesmas deformações da primeira iteração. Dessa forma, a perda de capacidade resistente na seção do apoio central se deu mais rapidamente transferindo os esforços para as seções dos vãos adjacentes, que por sua vez possuíam armadura suficiente. Além disso, como a altura da viga resultou menor, também houve uma diminuição do braço de alavanca na seção para resistir aos mesmos esforços, fato que provocou um aumento considerável nas forças de compressão no concreto. Diante desse cenário, o concreto passou a representar papel fundamental na resistência da estrutura. Com isso, o índice de confiabilidade diminuiu, já que o concreto apresenta maior dispersão em suas propriedades do que o aço. É interessante destacar que o modelo de confiabilidade foi avaliado considerando somente o primeiro modo de falha. Significa que, o primeiro modo de falha ocorrerá justamente na seção de maior esforço, no caso a seção sobre o apoio central. Portanto, em estruturas hiperestáticas, para que o índice de confiabilidade diminua é preciso que nessas seções, a capacidade resistente também diminua. Diante desse contexto, fica claro que em estruturas hiperestáticas sujeitas a processos de otimização com restrição em confiabilidade, a redistribuição de esforços torna-se imprescindível e mais intensa, uma vez que outras seções passam a desempenhar um grande papel na absorção dos esforços provenientes das seções mais enfraquecidas. A Tabela 2 traz os resultados finais em termos de coordenadas do ponto de projeto para o primeiro modo de falha e a importância de cada variável na probabilidade de falha.

Tabela 2 – Ponto de projeto e fatores de sensibilidade da solução ótima

Iteração	$\beta$	$u_c^*$	$u_s^*$	$\alpha_c$	$\alpha_s$	$P_f$
1	7,102	-1,257	-6,991	3,13 %	96,87 %	$9,298 \text{ e}^{-13}$
4	3,908	-3,866	-0,571	97,86 %	2,14 %	$4,711 \text{ e}^{-5}$

Para a verificação do comportamento estrutural da viga mediante os resultados da primeira e quarta iteração, foi realizada uma análise mecânica não-linear com o objetivo de avaliar as deformações dos materiais para a força aplicada, conforme Figura 6. O carregamento de 50kN foi aplicado em 20 passos iguais com o registro das deformações dos materiais na seção do apoio central (nó 9) e na seção do vão (nó 5). A legenda utilizada na Figura 6 possui o seguinte significado: C (concreto); A (aço); v (vão); e (apoio central); iter1 (iteração 1) e iter4 (iteração 4). Verificou-se que a deformação na armadura na seção do apoio central da iteração 4 resultou cerca de 38 % maior que as respectivas deformações da iteração 1. Como existe menos armadura e a força de tração é maior em virtude da diminuição da altura (perda de braço de alavanca), as deformações também devem ser maiores na estrutura resultante da iteração 4 em relação à primeira iteração. Este comportamento, sem dúvida, provoca uma redistribuição de esforços, de modo que as seções dos vãos passam a absorver mais momento fletor. Em função disso, também houve um aumento considerável, da ordem de 93 %, da deformação no concreto da iteração 4 em relação à iteração 1. Este fato também é bastante coerente, uma vez que com a diminuição da altura da seção, existe menos área para resistir aos mesmos esforços normais oriundos do carregamento.

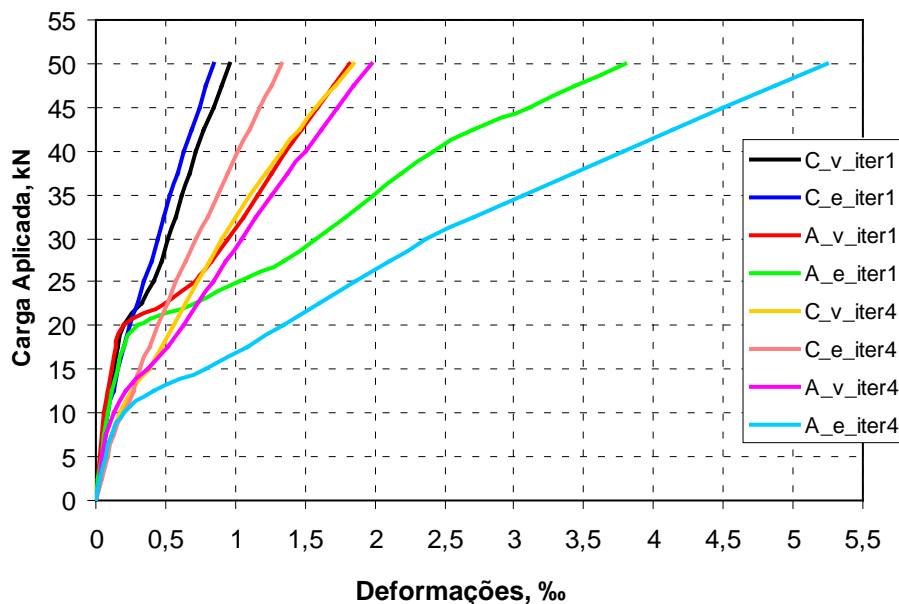


Figura 6 – Deformações nos materiais nas seções do apoio central e dos vãos.

Concluiu-se, a partir dos resultados apresentados, que ao se otimizar uma estrutura, a probabilidade de falha tende a aumentar, o que pode conduzir a estados contra a segurança em projetos, sendo necessário o acoplamento com métodos de confiabilidade se para evitar isso. Além disso, para esse caso, constatou-se que a otimização da estrutura provocou uma alteração no seu comportamento global, provocando alteração no cenário de falha, passando do aço para a falha no concreto na iteração final.

## 5 CONCLUSÕES

O trabalho apresentou um modelo para minimização do custo inicial de projeto de vigas em concreto armado submetidas a restrições mecânicas e de confiabilidade. A formulação embora simples mostrou-se eficaz na obtenção das dimensões ótimas de uma viga hiperestática em concreto armado, sendo capaz de levar em conta a redistribuição de esforços nas etapas de busca da solução.

É interessante destacar também que qualquer tentativa de se utilizar para fins práticos ferramentas de otimização em estruturas, a verificação da segurança estrutural necessita obrigatoriamente ser realizada de maneira mais precisa, o que sugere o uso da teoria da confiabilidade. Conforme foi visto, pequenas mudanças nas dimensões da peça podem resultar mudanças no cenário de falha da estrutura, alterando completamente o comportamento estrutural em serviço.

## 6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelos recursos concedidos para realização deste trabalho.

## 7 REFERÊNCIAS

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681: ações e segurança nas estruturas – procedimento.** Rio de Janeiro, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: projeto de estruturas de concreto – procedimento.** Rio de Janeiro, 2003.
- BAZANT, P.Z. Concrete fracture models: testing and practice. **Engineering fracture mechanics**, v. 69, p. 165-205, 2002.
- BRANCO, A.L.L.V. **Análise não-linear de pórticos planos considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo dos esforços e deslocamentos.** 2002. 87 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- DEBERNARDI, P.G. Behaviour of concrete structures in service. **Journal of Structural Engineering**, v. 115, n. 1, p. 32-50, 1989.
- GHALI, A.; FAVRE, R. **Concrete Structures: stresses and deformations.** Chapman & Hall, 1986.
- HASOFER, A.M.; LIND, N.C. Exact and invariant second moment code format. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 100, n. EM1, p. 111-121, feb., 1974.
- LEMAIRE, M. Finite element and reliability: combined methods by response surface. In: **PROBAMAT – 21<sup>st</sup> Century: Probability and Materials**, 1998. G.N. Frantziskonis (ed.), 1998. p.317-331.
- LEMAITRE, J. **A course on damage mechanics.** Springer-verlag, 1992. 210 p.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L. **Mechanics of solid materials.** Cambridge University Press, 1994. 581 p.
- MANZOLI, O.L. et al. Three-dimensional analysis of reinforced concrete members via embedded discontinuity finite elements. **Ibracon Structures and Materials Journal**, v. 1, n. 1, p. 58-83, 2008.
- MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure.** 1984. Thèse (Doctorat d'État) – Université Paris 6, Paris, 1984.
- MOHAMED, A. **RYFES Theoretical manual version 1.0.** LaRAMA – Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée. Clermont Ferrant, France, 1996.

NGUYEN, G.D.; KORSUNSKY, A.M. Development of an approach to constitutive modelling of concrete: Isotropic damage coupled with plasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 45, p. 5483-5501, 2008.

NEVES, R.A. et al. Reliability analysis of reinforced concrete grids with nonlinear material behavior. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 91, p. 735-744, 2006.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S.J. **Numerical optimization**. Springer-Verlag, 1999, 634 p.

NOGUEIRA, C.G. **Um modelo de confiabilidade e otimização aplicado às estruturas de barras de concreto armado**. 2005. 166 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

OWEN, D.R.J.; HINTON, H. **Finite elements in plasticity: theory and practice** Pineridge Press, Swansea, U.K, 1980.

PROENÇA, S.P.B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições**. 1988. 330 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

RACKWITZ, R.; FIESSLER, B. Structural reliability under combined random load sequences. **Computer and Structures**, v. 9, p. 489-494, 1978.

SCOTTA, R. et al. A scalar damage model with a shear retention factor for the analysis of reinforced concrete structures: theory and validation. **Computers and Structures**, v. 79, p. 737-755, 2001.

SOARES, R.C. et al. Reliability analysis of non-Linear reinforced concrete frames using the response surface method. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 75, p. 1-16, 2002.

