

TEORIA DA CONFIABILIDADE APLICADA NA AVALIAÇÃO DA INFLUÊNCIA DA NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA EM PÓRTICOS DE CONCRETO ARMADO

Caio Gorla Nogueira¹ & Wilson Sergio Venturini²

Resumo

Este trabalho apresenta um modelo que combina o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM) e um modelo mecânico não-linear físico e geométrico para análise da segurança de um pórtico em concreto armado. O Método dos Elementos Finitos foi utilizado para representar o comportamento da estrutura, em conjunto com o modelo de dano de Mazars para o concreto, modelo elastoplástico com encruamento isótropo positivo para o aço e a descrição lagrangeana atualizada para simular a não-linearidade geométrica. A grande vantagem da utilização do FORM para resolver o problema de confiabilidade está na determinação direta do ponto de projeto, sem a necessidade de se obter aproximações para as equações de estado limite. O modelo foi utilizado na avaliação da probabilidade de falha de um pórtico em concreto armado considerando múltiplos modos de falha. O modelo apresentou um desempenho numericamente estável e eficiente na determinação das probabilidades de falha. Além disso, o trabalho apresentou resultados que mostram a necessidade de se considerar o comportamento não-linear geométrico mesmo em pórticos de pequeno porte.

Palavras-chave: Concreto armado. Método dos elementos finitos. Confiabilidade. FORM. Não-linearidade física e geométrica.

RELIABILITY THEORY APPLIED TO EVALUATE THE INFLUENCE OF GEOMETRIC NON-LINEARITY IN REINFORCED CONCRETE FRAMES

Abstract

This paper presents a model that combines the First-Order Reliability Method (FORM) and a physical and geometrical non-linear mechanical model to safety analysis of a reinforced concrete frame. The Finite Element Method (MEF) was used to represent the structural behavior, together with the damage model of Mazars for concrete, isotropic positive elastoplastic hardening model for steel and the updated lagrangian description to simulate the geometric non-linearity. The major advantage in using FORM to solve the reliability problem is addressed to direct determination of the design point, without limit state approximations. The model was used to evaluate the probability of failure of a reinforced concrete frame with multiples failures modes. The model performance was numerically stable and efficient in determining of the probabilities of failure. Moreover, it shows the necessity of considering the geometrical non-linear behavior even in small frames.

Keywords: Reinforced concrete. Finite elements method. Reliability. FORM. Physical and geometric non-linearity.

1 INTRODUÇÃO

Os avanços na engenharia, bem como a demanda por construções cada vez mais eficientes nos dias atuais têm conduzido os profissionais a buscar soluções mais arrojadas. Esse arrojo deve ser

¹ Doutor em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, gorlanog@sc.usp.br

² Professor Titular do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, venturin@sc.usp.br

acompanhado de forte embasamento teórico no campo das modelagens mecânicas dos materiais e das estruturas para que possam conduzir os projetistas ao conhecimento aprofundado de suas soluções. No caso de estruturas de edifícios altos, modelos que considerem o comportamento não-linear do concreto e do aço, bem como o comportamento não-linear geométrico da estrutura são essenciais nos projetos atuais. O Método dos Elementos Finitos (MEF), dessa forma, torna-se uma ferramenta interessante e muito utilizada para a resolução desse problema, uma vez que permite reunir todos esses efeitos de maneira simples e consistente. Além disso, a análise da segurança de estruturas desse porte requer cuidado extra. A teoria da confiabilidade, em franco desenvolvimento atualmente e com diversas aplicações (Frangopol et al. 1996, Imai; Frangopol, 2000, Frangopol; Imai, 2000), é uma alternativa interessante para a verificação da segurança estrutural. A definição de probabilidades de falha, isto é, quantificar as chances de insucesso de uma estrutura frente a um ou vários estados limites, permite aos profissionais conhecer melhor suas soluções e o quanto estas estão longe desses estados limites. Além disso, as incertezas provenientes das propriedades dos materiais, carregamentos atuantes, processos construtivos, modelos matemáticos para modelagem dos elementos, constituem uma amostra da importância de se quantificá-las mais adequadamente e levá-las ao projeto estrutural. A análise de confiabilidade quantifica essas incertezas por meio do índice de confiabilidade, que reflete a segurança estrutural para os cenários considerados (Ghali et al. 2009).

Outro aspecto interessante consiste nos acoplamentos entre os modelos mecânicos e os modelos de confiabilidade para realização desse tipo de análise. Uma das maneiras já bem sedimentadas na literatura é o acoplamento entre modelos fundamentados no método dos elementos finitos para análise mecânica e no Método das Superfícies de Respostas (MSR) para a análise da confiabilidade (Soares et al., 2002, Neves et al., 2006, Nogueira; Venturini, 2006, Aoues; Chateauneuf, 2008). Nesse tipo de abordagem, as respostas mecânicas obtidas pelo MEF são utilizadas como ponto de partida para a construção de superfícies de resposta, que são na verdade aproximações polinomiais da função de estado limite do modo de falha considerado. No entanto, esse tipo de abordagem é fortemente dependente da combinação determinística das variáveis aleatórias dadas pelos chamados planos de experiência. Esses planos são definidos em função dos valores das médias e desvios-padrão das variáveis aleatórias e têm sua construção, na primeira aproximação, inicialmente sobre as médias das mesmas. A análise evolui com a construção de um novo plano de experiência sobre o ponto de projeto encontrado na iteração anterior e assim sucessivamente até a convergência do processo de busca do ponto de projeto e do índice de confiabilidade (Nogueira, 2010). Outra abordagem para o problema consiste no acoplamento direto do MEF com o Método de Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM). Nesse caso, não há a necessidade de se construir uma aproximação para a função de estado limite, pois esta é diretamente utilizada de acordo com a formulação do problema. Isso faz com que o processo de busca do ponto de projeto seja mais rápido e direto do que a abordagem com MSR (Leonel, 2009, Nogueira, 2010).

Este trabalho faz uso, portanto, do acoplamento entre o MEF e o FORM para análise da confiabilidade de um pórtico em concreto armado, com o objetivo de verificar a influência da não-linearidade geométrica em termos de probabilidades de falha.

2 METODOLOGIA

2.1 O Modelo mecânico

Neste trabalho, foi utilizado um elemento finito de pórtico plano com três graus de liberdade por nó, sendo duas translações e uma rotação, conforme Figura 1, com abordagem convencional em deslocamentos. Este elemento finito embora apresente formulação relativamente simples, apresenta bons resultados em termos de convergência e precisão, conforme observados em outros trabalhos como Paula, 2001 e Branco, 2002.

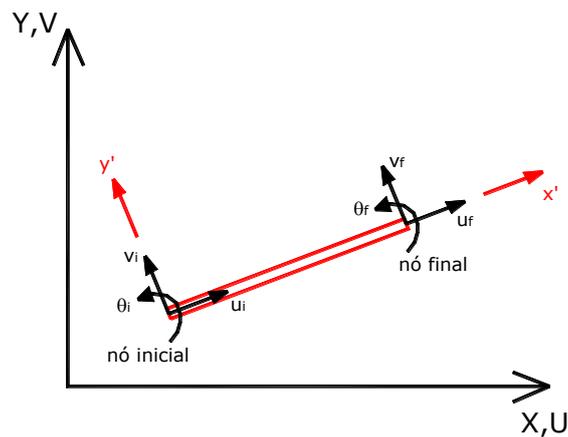


Figura 1 – Elemento finito de pórtico plano e seus parâmetros nodais.

O comportamento não-linear do concreto foi representado pelo modelo de dano de Mazars, 1984 e o aço foi tratado através de um modelo elastoplástico com encruamento isótropo positivo (Nogueira; Venturini, 2006, Nogueira, 2010), conforme Figuras 2 e 3, respectivamente.

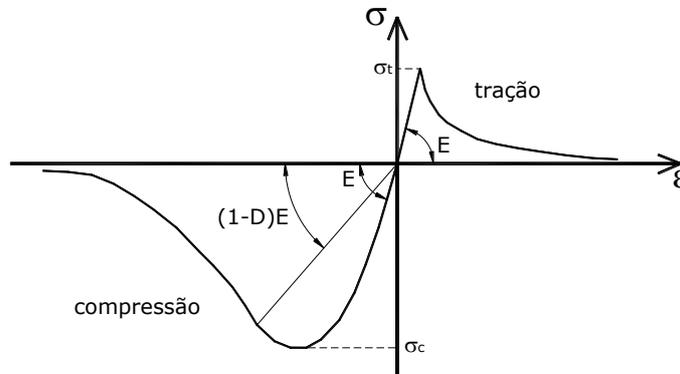


Figura 2 – Diagrama tensão x deformação do concreto.

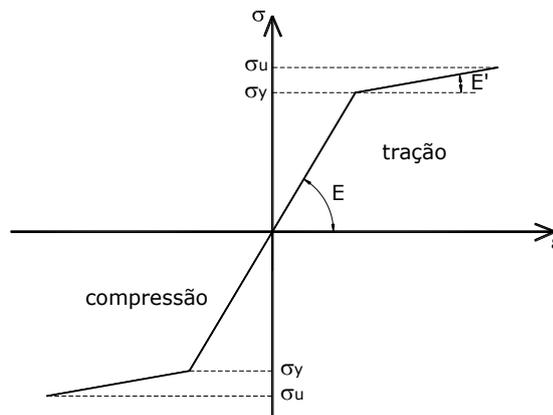


Figura 3 – Diagrama tensão x deformação do aço.

Esses modelos foram combinados à descrição lagrangeana atualizada na análise do equilíbrio com hipótese de pequenos deslocamentos para a consideração da não-linearidade geométrica. Considerou-se, incorporada à lei constitutiva dos materiais, a deformação de Green com forma quadrática no lugar da deformação linear. Do mesmo modo, para garantir a consistência da formulação, foi empregado o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. A seguir, estão descritos os passos da formulação até as expressões da matriz de rigidez tangente e do vetor de forças internas dos elementos. A resolução do problema não-linear foi feita a partir de um processo incremental-iterativo via algoritmo de Newton-Raphson com a utilização de matriz de rigidez tangente.

Um procedimento de busca da força de violação dos estados limites de perda de estabilidade ou colapso estrutural, bem como de ruptura dos materiais foi desenvolvido para obtenção do vetor de respostas necessário na análise de confiabilidade.

2.2 Matriz de rigidez tangente e vetor de forças internas

Seja um ponto P em uma barra qualquer definida no plano XY , conforme Figura 4. Um deslocamento arbitrário em função das componentes horizontal e vertical pode ser escrito respectivamente por:

$$\begin{aligned} u_p(x, y) &= u(x) - y \sin(\theta) \\ v_p(x, y) &= v(x) - y + y \cos(\theta) \end{aligned} \quad (1)$$

Considerando uma aproximação em segunda ordem pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \theta = v'(x) \\ \cos(\theta) &= 1 - \frac{v'(x)^2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

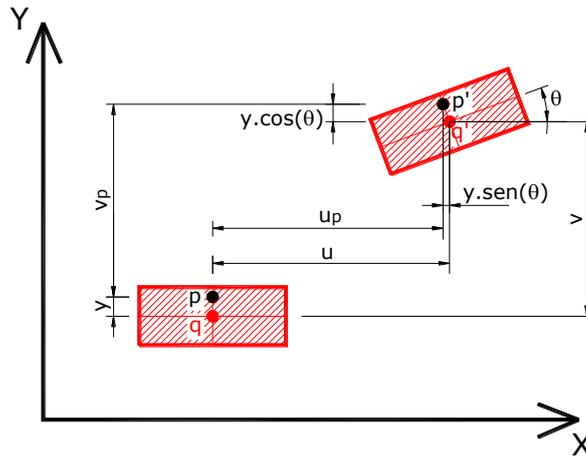


Figura 4 – Cinemática adotada.

Assim, o campo de deslocamentos do ponto P pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} u_p(x, y) &= u(x) - yv'(x) \\ v_p(x, y) &= v(x) - y \frac{v'(x)^2}{2} \end{aligned} \quad (3)$$

Por se tratar de uma análise aplicada às barras sem a consideração dos efeitos do cisalhamento, o tensor de deformações pode ser escrito por:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde: ε_x é a deformação longitudinal com os termos de 2ª ordem para a inclusão da não-linearidade geométrica cujo valor é:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_p}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (5)$$

Combinando-se a Equação (5) com as Equações (2) e (3) e desprezando-se os termos com produtos de ordem superior, obtêm-se o campo de deformações longitudinais para o elemento finito de pórtico plano conforme segue:

$$\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2} (u')^2 + \frac{1}{2} (v')^2 - yv''(1 + u') \quad (6)$$

Para que a formulação fique consistente, o tensor de deformações de Green deve ser conjugado com um tensor de tensões compatível, que no caso, é o tensor de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. Em regime de pequenos deslocamentos, como é o caso deste trabalho, o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie é igual ao tensor de tensões convencional, o que significa escrever a seguinte relação:

$$\underline{S} = \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E\varepsilon_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

onde: E é o módulo de elasticidade do material.

Aplicando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e realizando-se os devidos trabalhos algébricos, são obtidas as expressões que definem a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas do elemento finito, conforme segue:

$$K = \int_{V_0} \underline{B}_{xx}^T E \underline{B}_{xx} dV_0 + \int_{V_0} \underline{G}_{xx} S dV_0 \quad (8)$$

$$F_{int} = \int_{V_0} \underline{B}_{xx} S dV_0$$

onde: \underline{B}_{xx} é a matriz de incidência que contém as derivadas das funções de forma do problema; \underline{G}_{xx} é a matriz de incidência para a não-linearidade geométrica; V_0 denota o volume inicial do elemento antes de sofrer o estado de deformação.

As matrizes de incidência são dadas de acordo com:

$$\underline{B}_{xx} = A^T + (A^T u) A^T + (B^T u) B^T - y C^T - y (C^T u) A^T - y (A^T u) C^T \quad (9)$$

$$\underline{G}_{xx} = A A^T + B B^T - y A C^T - y C A^T$$

Os vetores A^T , B^T e C^T relacionam as deformações dadas pela Equação (6) com os deslocamentos nodais dos elementos como segue:

$$u' = [N1' \ 0 \ 0 \ N2' \ 0 \ 0] \mu = A^T u$$

$$v' = [0 \ N3' \ N4' \ 0 \ N5' \ N6'] \mu = B^T u \quad (10)$$

$$v'' = [0 \ N3'' \ N4'' \ 0 \ N5'' \ N6''] \mu = C^T u$$

onde: Ni' e Ni'' com $i = 1$ a 6 são as derivadas primeira e segunda das funções de forma adotadas para o problema. As funções de forma utilizadas são dadas por:

$$\begin{aligned}
 N1 &= \left(1 - \frac{x}{L_0}\right); N2 = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L_0}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L_0}\right)^3\right]; N3 = L_0 \left[\left(\frac{x}{L_0}\right) - 2\left(\frac{x}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{L_0}\right)^3\right] \\
 N4 &= \left(\frac{x}{L_0}\right); N5 = \left[3\left(\frac{x}{L_0}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L_0}\right)^3\right]; N6 = L_0 \left[-\left(\frac{x}{L_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{L_0}\right)^3\right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

onde: x corresponde a uma coordenada horizontal qualquer no interior do elemento finito; L_0 é o comprimento inicial do elemento finito.

A formulação lagrangeana atualizada é caracterizada por descrever a situação da estrutura em relação à última configuração equilibrada, isto é, todas as informações necessárias para o próximo incremento são retiradas do passo anterior convergido. Para que a implementação computacional seja adequada, são necessárias duas atualizações. A primeira consiste em atualizar continuamente as coordenadas cartesianas nodais, acrescentando o vetor de deslocamentos incrementais à última configuração de equilíbrio. Assim, no início do próximo incremento de carga, a estrutura estará com novas coordenadas nodais e, portanto, na posição deslocada. Essa passagem é definida por:

$$\underline{X} = \underline{X}_0 + \underline{\Delta u} \tag{12}$$

onde: \underline{X} é o vetor com as coordenadas nodais do passo atual; \underline{X}_0 é o vetor que contém as coordenadas cartesianas nodais do passo anterior convergido; $\underline{\Delta u}$ é o vetor com os incrementos de deslocamento da última iteração do passo atual.

A segunda atualização é feita sobre o tensor de tensões, pois na descrição lagrangeana atualizada, a mudança contínua de referencial requer a transformação do tensor de tensões para a nova configuração. A maneira adequada de realizar essa transformação é utilizar o tensor de Cauchy, relacionando-o com o tensor de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie. No entanto, para pequenos deslocamentos, o tensor de Cauchy coincide, na configuração atual, com o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de 2ª espécie da configuração anterior. Desse modo, a cada passo do processo incremental, basta adicionar o incremento de tensão do passo, $\underline{\Delta S}$, ao tensor do passo anterior, \underline{S}_0 , conforme segue:

$$\underline{S} = \underline{S}_0 + \underline{\Delta S} \tag{13}$$

Para considerar o efeito combinado da não-linearidade geométrica e física dos materiais na análise de estruturas de pórticos planos em concreto armado, devem-se combinar adequadamente os modelos de dano e elastoplástico com a forma lagrangeana atualizada. Assim, o problema consiste em montar a matriz de rigidez tangente combinada e o vetor de forças internas considerando ao mesmo tempo os efeitos da NLF e da NLG. Para dar continuidade no desenvolvimento, será suprimido o índice x das expressões por se tratar somente da existência dessa componente na formulação, não havendo, portanto, necessidade de carregá-la até o fim do texto.

Em função do regime de pequenos deslocamentos, a tensão dada pela Equação (7) pode ser escrita em termos da variável de dano do modelo de Mazars:

$$S = (1 - D)E\varepsilon \tag{14}$$

onde: D é o valor da variável de dano obtida em função do estado de deformação do ponto considerado.

Assim, pode-se reescrever a matriz de rigidez tangente e o vetor de forças internas para o elemento finito de pórtico plano a partir das Equações (8) e (14) conforme segue:

$$\begin{aligned}
 K &= \int_{V_0} \underline{\underline{B}}^T (1-D) E \underline{\underline{B}} dV_0 + \int_{V_0} \underline{\underline{B}}^T \eta E \varepsilon \underline{\underline{B}} dV_0 + \int_{V_0} \underline{\underline{G}} S dV_0 \\
 F_{\text{int}} &= \int_{V_0} \underline{\underline{B}}^T S dV_0
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

O parâmetro η considera a derivada da deformação equivalente do modelo de dano em relação à componente de deformação ε , de acordo com:

$$\eta = -F_T(\tilde{\varepsilon}) \text{ e } D = D_T \text{ se } \varepsilon > 0; \quad \eta = \nu \sqrt{2} F_C(\tilde{\varepsilon}) \text{ e } D = D_C \text{ se } \varepsilon < 0; \quad \eta = 0 \text{ caso não haja evolução da variável de dano.}$$

onde: ν é o coeficiente de Poisson do material. As funções $F_T(\tilde{\varepsilon})$ e $F_C(\tilde{\varepsilon})$ são escritas em termos dos parâmetros internos do modelo de dano de Mazars e do estado de deformação equivalente do ponto. Para mais detalhes sobre a formulação de dano consultar os trabalhos de Paula, 2001 e Nogueira, 2010.

Como se trata de um elemento finito unidimensional de pórtico plano, as integrais de volume ficam definidas ao longo do comprimento e da altura da seção transversal de cada elemento. Essas integrais são avaliadas em cada ponto de Gauss dos elementos, de modo que a matriz de rigidez e o vetor de forças internas levem em conta a contribuição de todos os pontos do domínio da estrutura.

2.3 Estado limite de ruptura dos materiais

A falha por ruptura dos materiais ocorre quando um determinado ponto de integração ou camada de armadura da seção transversal atinge um valor limite de deformação. Esses valores são dados por: -3,5‰ para o concreto comprimido e 10,0‰ para o aço tracionado. Portanto, ao se atingir um ou ambos os valores de deformação limite, o algoritmo pára, recupera as variáveis do passo anterior convergido e reinicia a análise a partir desse passo. O procedimento numérico para a obtenção da força última é realizado dividindo-se o incremento de força por um número inteiro qualquer e aplicando-se essas parcelas de força em novos incrementos sucessivos até que seja verificada novamente a condição de ruptura dos materiais. O processo é repetido até uma determinada tolerância que define o valor final da força última que representa a perda de capacidade resistente da seção transversal.

2.4 Estado limite de perda de estabilidade ou colapso estrutural

A falha por perda de estabilidade global da estrutura ou colapso total é considerada neste trabalho quando a matriz de rigidez global do sistema torna-se singular, ou seja, o determinante da matriz é nulo. Nesse caso não é definida nenhuma função de estado limite como no caso do esgotamento da seção, pois a força última é encontrada quando o processo incremental-iterativo não apresentar convergência. Em termos computacionais, a cada iteração verifica-se a singularidade da matriz de rigidez global, que traduz sua capacidade de resolver o sistema de equações algébricas. Quando a matriz se torna singular, automaticamente o processo iterativo é interrompido, pois a tangente ao ponto procurado é nula. É conveniente ressaltar que este estado limite de perda de estabilidade, em função da maneira como é considerado, pode ser aplicado a qualquer tipo de estrutura, seja uma viga, pilar ou pórtico, caracterizando sempre o colapso total da estrutura. O procedimento numérico para a obtenção da força última é realizado da mesma forma que o explicado anteriormente, porém a falha é verificada pela singularidade da matriz de rigidez. O processo é repetido até uma determinada tolerância que define o valor final da força última de colapso estrutural.

3 DESENVOLVIMENTO

3.1 Métodos de análise de confiabilidade

Uma análise de confiabilidade sempre parte de dois pressupostos: incertezas presentes nas variáveis ou parâmetros do problema, decorrentes de sua variabilidade, que implicam um determinado tipo de risco e um critério ou critérios que determinam sucesso ou insucesso do evento. Com relação às incertezas, estas estão presentes em praticamente todos os parâmetros envolvidos em análises estruturais e podem ser de caráter humano ou natural (Ghali et al., 2006). Já o critério definido para estudar o problema, na engenharia estrutural, é conhecido como estado limite. São expressos em termos de uma função matemática, que é composta por uma relação que evidencia a interação dos parâmetros, considerados aleatórios graças às incertezas embutidas em cada um deles. De modo geral, quando esta função resulta negativa significa uma realização de insucesso ou falha e quando resulta positiva, ocorre o sucesso e a estrutura encontra-se em uma realização segura. O valor nulo para esta função indica exatamente um ponto sobre a função de estado limite indicando a maior probabilidade de ocorrência do evento considerado. Hasofer; Lind, 1974 propuseram o conceito de índice de confiabilidade que significa exatamente isso, ou seja, a menor distância entre a origem de um sistema de coordenadas normalizado até a função de estado limite, conforme Figura 5.

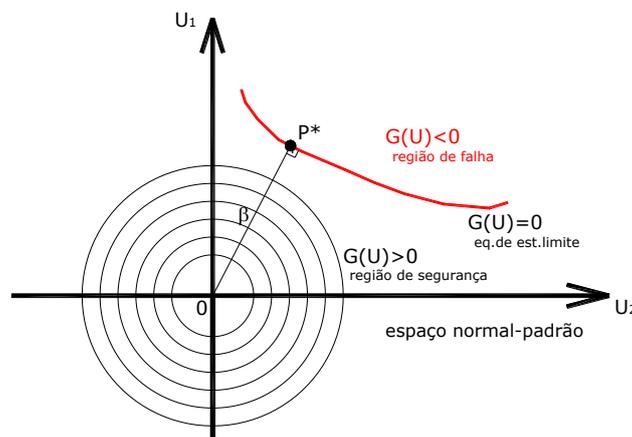


Figura 5 – Representação geométrica do índice de confiabilidade.

O ponto sobre a função que representa essa distância é chamado de ponto de projeto, que indica o conjunto de valores dos parâmetros aleatórios que contém o maior valor de probabilidade de ocorrência daquele estado limite. Genericamente, o índice de confiabilidade pode ser obtido pelo seguinte problema de otimização:

$$\beta = \min_u \sqrt{\sum_{i=1}^{nva} u_i^2} \quad (16)$$

sujeito : $G(u_i) = 0$

onde: β é o índice de confiabilidade; nva é o número de variáveis aleatórias; u_i são as coordenadas do ponto de projeto dadas em termos de cada variável aleatória; $G(u_i)$ é a função de estado limite do problema.

Os passos para obtenção do ponto de projeto podem ser vistos a seguir:

1. Escolher um ponto de partida para iniciar o processo de busca. Esse ponto não precisa necessariamente estar sobre a equação de estado limite. Normalmente, escolhem-se as médias das variáveis aleatórias no espaço físico;

2. Avaliação da equação de estado limite no espaço físico, que pode ser explícita ou implícita. As equações explícitas são definidas diretamente pelas variáveis aleatórias que participam do modo de falha. No caso das equações implícitas, são relacionadas grandezas que são funções das variáveis aleatórias, sendo necessário obtê-las numericamente. Por exemplo, é o caso de uma função de estado limite escrita em termos do momento fletor de uma viga. O momento resistente é função das resistências do aço e do concreto, que podem ser as variáveis aleatórias do problema. Definem-se então os valores dessas resistências e faz-se a análise numérica da estrutura para se obter o momento fletor resistente. Isso ocorre principalmente quando se considera o caráter não-linear dos materiais;
3. Cálculo da matriz Jacobiana (J) e da inversa da Jacobiana (J^{-1}). O índice de confiabilidade é definido no espaço normal-padrão das variáveis não-correlacionadas. Em função disso, é necessário realizar uma transformação isoprobabilística do espaço físico para o espaço normal-padrão (X para U). Essa transformação é gerida pela matriz Jacobiana. Caso haja correlação entre as variáveis e estas tenham distribuições de probabilidades diferentes, o processo de obtenção das matrizes Jacobianas muda um pouco, pois primeiro é necessário transformar as variáveis do espaço físico correlacionado para o espaço normal-padrão correlacionado e só depois passar para o espaço normal-padrão não-correlacionado. Esse processo está bem explicado em Beck, 2006. Assim, as matrizes Jacobiana e a sua inversa para variáveis normais não-correlacionadas dependem somente dos desvios-padrão das variáveis sendo dadas por:

$$J = \begin{bmatrix} 1/\sigma_{X_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{X_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_{X_n} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{X_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{X_n} \end{bmatrix}$$

4. Transformação do ponto de X para U através da seguinte relação: $U = J\{X - M\}$, onde M é o vetor com todas as médias das variáveis aleatórias;
5. Cálculo dos gradientes da equação de estado limite. Devem-se avaliar primeiramente os gradientes da equação de estado limite no espaço físico (∇G_X) e depois transformá-los para o espaço normal-padrão (∇G_U). Novamente, essa etapa depende da forma da equação de estado limite. Caso esta esteja na forma explícita, as derivadas com relação a cada uma das variáveis aleatórias são diretas. Porém, caso a equação de estado limite seja implícita, as derivadas devem ser avaliadas por diferenças finitas. Esse procedimento será explicado logo adiante. Assim, a transformação dos gradientes fica definida por:

$$\nabla G_U = (J^{-1})^T \nabla G_X \quad (18)$$

6. Cálculo dos fatores de sensibilidade (α). A principal função dos fatores de sensibilidade é mostrar quais variáveis aleatórias têm de fato importância na determinação da probabilidade de falha da estrutura, sendo utilizados, portanto, para eliminar variáveis com pouca importância. Eles respeitam a seguinte relação: $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$;
7. Cálculo do novo ponto pelo algoritmo HLRF (Hasofer; Lind, 1974 e Rackwitz; Fiessler, 1978);
8. Transformação do novo ponto de U para X através da seguinte relação:
 $X = J^{-1}U + M$;
9. Cálculo do índice de confiabilidade no novo ponto calculado;
10. Verificação do critério de convergência. Caso este seja satisfeito, finaliza-se o processo, caso contrário retorna-se ao passo 3 até que a convergência seja atingida.

Uma vez definido o índice de confiabilidade, a probabilidade de falha pode ser estimada por métodos aproximados, como é o caso do FORM e do SORM. No FORM, a equação de estado limite é aproximada por um hiperplano tangente que passa exatamente sobre o ponto de projeto. Com isso, a probabilidade de falha pode ser avaliada em função da distribuição normal inversa acumulada de probabilidades conforme segue:

$$P_{f,FORM} = \Phi(-\beta) \quad (19)$$

onde: $\Phi()$ é a distribuição acumulada de probabilidades no espaço normal-padrão (com média zero e desvio-padrão é unitário).

A aproximação em segunda ordem do tipo SORM (Second Order Reliability Method) pode ser utilizada em casos de forte não-linearidade da função de estado limite ou quando existem muitas variáveis aleatórias com distribuição diferente da normal. Breitung, 1984 propôs a utilização de um hiper-parabolóide ajustado através das curvaturas principais da equação de estado limite no espaço normal-padrão. Mais detalhes podem ser encontrados em Beck, 2006 e Nogueira, 2010. A Figura 6 ilustra as aproximações em primeira e segunda ordem, bem como suas diferenças em termos do erro cometido nas proximidades do ponto de projeto.

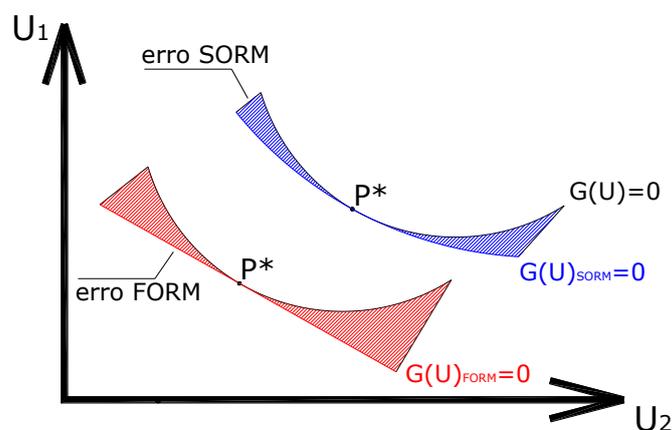


Figura 6 – Aproximações do tipo FORM e SORM.

Durante o processo de resolução do problema de confiabilidade, em cada iteração de busca do ponto de projeto, diversas avaliações da função de estado limite e suas derivadas se fazem

necessárias. Essas avaliações são dadas pela resposta do modelo mecânico para um determinado conjunto de valores das variáveis aleatórias. Quando se trata do acoplamento direto entre MEF e FORM, as derivadas da função de estado limite são obtidas por diferenças finitas no espaço físico e em seguida transformadas para o espaço normal-padrão. Basicamente, para se determinar a derivada em relação à variável aleatória x_i , fixam-se as demais variáveis no ponto candidato e faz-se uma pequena variação na variável x_i . Em seguida, a resposta mecânica da estrutura é obtida pelo MEF. Assim a derivada parcial é avaliada da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial G_x}{\partial x_i} \right|_{X=x} = \frac{R(x_i + \Delta x_i, \dots, x_n + \Delta x_n) - R(x_i, \dots, x_n)}{\Delta x_i} \quad (20)$$

onde: R é a resposta mecânica da estrutura; Δx_i corresponde ao incremento dado somente na variável aleatória x_i . Com relação ao incremento, Δx_i , dado a cada variável, pode-se adotar um valor da ordem de 1% do respectivo desvio-padrão.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 7 ilustra o pórtico estudado e a discretização adotada. Foram utilizados 10 elementos finitos por pilar e 20 elementos finitos para a viga. O objetivo da análise é comparar os valores de probabilidade de falha do pórtico considerando comportamento não-linear físico somente (NLF) e comportamento não-linear físico e geométrico (NLFG).

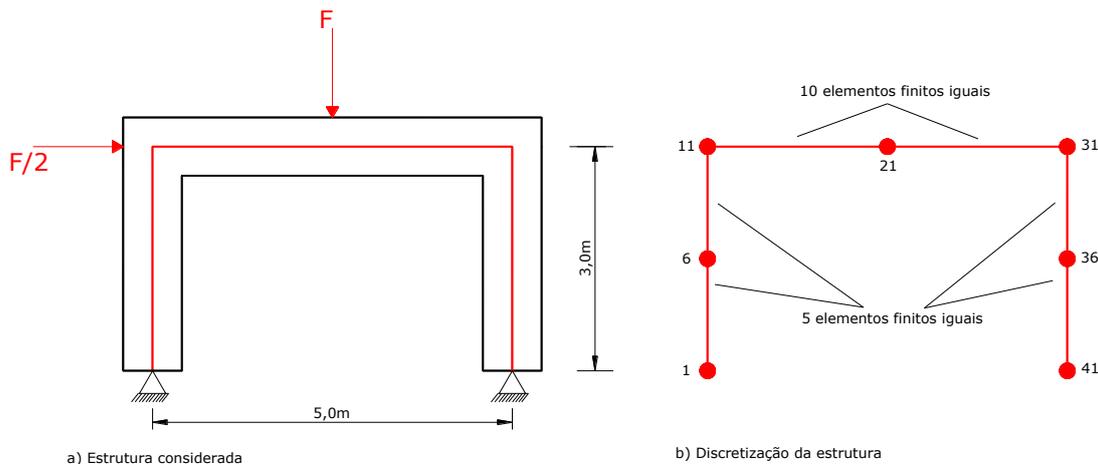


Figura 7 – Pórtico analisado e discretização adotada.

Por se tratar de uma estrutura bi-apoiada, são necessárias duas rótulas para a formação de um mecanismo de colapso. As diversas possibilidades de formação de rótulas plásticas estão mostradas na Figura 8. Os seis primeiros modos representam a ocorrência de rótulas plásticas, dadas pelo esmagamento do concreto comprimido (-3,5‰) e/ou alongamento excessivo da armadura (10‰) nas posições indicadas. O sétimo modo de falha consiste na perda de estabilidade do pórtico quando a matriz de rigidez global se torna singular, isto é, determinante nulo.

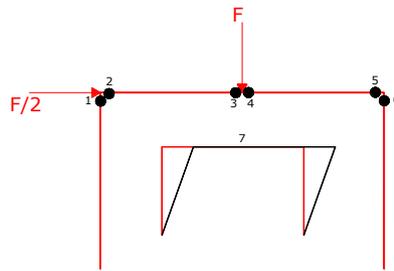


Figura 8 – Modos de falha possíveis para o pórtico.

A técnica de integração numérica utilizada foi a Gauss-Lobatto (Nogueira 2010) com 6 pontos de integração ao longo do comprimento de cada elemento finito e 20 pontos ao longo da altura da seção transversal. As forças foram aplicadas em incrementos de 10kN e 5kN, respectivamente para a vertical e horizontal. Foi adotado módulo de elasticidade do aço igual a 196000MPa e 10% desse valor para o módulo plástico de encruamento. A Figura 9 traz o detalhamento do pórtico e suas armaduras obtidas através do dimensionamento padrão segundo o método semiprobabilístico da NBR 6118:2003. Os coeficientes de minoração das resistências do aço e do concreto foram 1,15 e 1,4 respectivamente, ao passo que o coeficiente de majoração das ações adotado foi de 1,4.

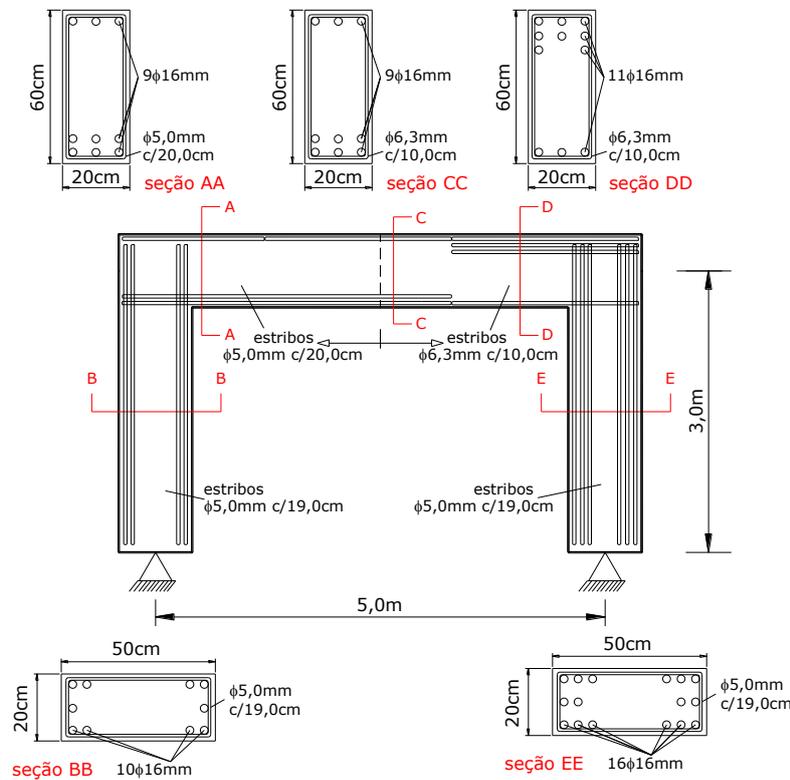


Figura 9 – Modos de falha possíveis para o pórtico.

As variáveis aleatórias consideradas na análise foram: resistência à compressão do concreto, f_c , (média 30MPa e coeficiente de variação 15%; tensão de escoamento do aço, f_y , (média 565,8MPa e coeficiente de variação 8%); força aplicada, F , (média 210kN e coeficiente de variação 10%). As equações de estado limite foram definidas em termos de margens de segurança para cada modo de falha, definidas por força última menos força aplicada, de acordo com:

$$g_{i=1,7}(f_c, f_y, F) = F_{ULTi=1,7}(f_c, f_y) - F_{i=1,7} \quad (e1)$$

A Figura 10 mostra a trajetória de equilíbrio horizontal do nó 11 para os modelos NLF e NLFG considerando a falha por perda de estabilidade do pórtico, ou seja, modo de falha 7.

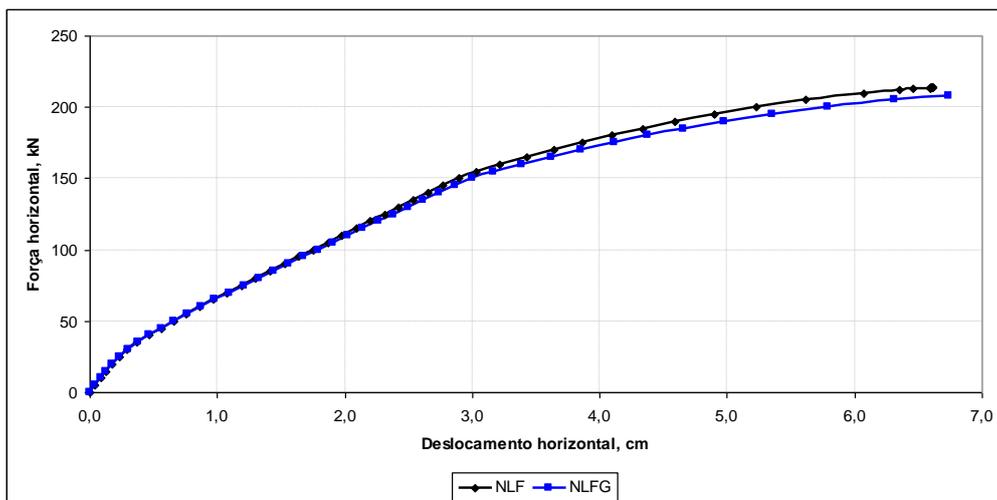


Figura 10 – Diagrama força horizontal x deslocamento horizontal do nó 11.

Inicialmente foi realizada uma análise determinística com as médias das variáveis aleatórias com o objetivo de se determinar os valores de força última de cada modo de falha. A Tabela 1 ilustra esses resultados. A diferença percentual entre os valores de força última para o modo de falha 6 foi da ordem de 2,1%. Com isso, verificou-se que ao se considerar o modelo não-linear físico e geométrico, o pórtico apresentou menor resistência, mesmo sendo uma estrutura de pequeno porte. Como o pórtico possui somente um grau de hiperstaticidade, a formação de uma rótula plástica leva a estrutura a se tornar isostática (modo 6). Após isso, antes mesmo de se atingir as deformações limites dos materiais em qualquer outro modo de falha, a estrutura perdeu sua estabilidade global, atingindo o sétimo modo de falha, resultando em seu colapso. Dessa forma, pela análise determinística, os demais modos de falha ficam “ocultos” atrás dos modos 6 e 7 da estrutura.

Tabela 1 – Força última para cada modo de falha

F_{ULT} (kN)	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6	Modo 7
NLF	427,48	427,48	427,48	427,48	427,48	357,76	427,48
NLFG	415,00	415,00	415,00	415,00	415,00	350,21	415,00

A análise de confiabilidade foi realizada considerando, portanto, somente dois modos de falha, ou seja, modos 6 e 7. Os resultados estão mostrados na Tabela 2, onde estão apresentados os valores das coordenadas do ponto de projeto (f_c, f_y, F), a sensibilidade de cada uma das variáveis aleatórias (α_i) em relação à probabilidade de falha.

Tabela 2 – Pontos de projeto, sensibilidades das variáveis e probabilidade de falha

		f_c (MPa)	f_s (MPa)	P (kN)	α_c (%)	α_s (%)	α_p (%)	P_f
NLF	Modo 6	19,09	417,11	299,06	16,93	31,19	51,88	$1,94e^{-9}$
	Modo 7	10,95	413,48	283,74	43,06	27,29	29,65	$5,61e^{-11}$
NLFG	Modo 6	19,66	424,46	297,44	16,27	30,18	53,55	$6,33e^{-9}$
	Modo 7	12,04	413,26	284,56	39,89	28,52	31,59	$1,32e^{-10}$

A Figura 11 mostra os valores dos índices de confiabilidade para cada modo de falha considerando os modelos NLF e NLFG. É interessante notar que o erro percentual em termos do índice de confiabilidade obtido para o modo 6 foi de 3,4%, valor maior que o erro de 2,1% encontrado considerando somente a análise determinística. Assim, a análise permitiu observar que o efeito da não-linearidade geométrica é mais significativo quando as incertezas existentes nas propriedades dos materiais e no carregamento são consideradas de maneira mais consistente. A utilização da teoria da confiabilidade para a avaliação da segurança de estruturas é, dessa forma, recomendável na prática dos projetos estruturais, pois permite avaliar mais precisamente a segurança estrutural.

Do ponto de vista prático, em projetos estruturais de concreto armado nem mesmo a formação de um único modo de falha deve ocorrer. Assim, a estrutura é analisada mediante sempre a probabilidade de falha do primeiro modo ou também chamado modo de falha mais provável. Em termos de colapso total, o índice de confiabilidade obtida para o modelo NLFG foi de 6,318. No entanto, do ponto de vista de projeto estrutural, o índice de confiabilidade a ser considerado na verificação da segurança do pórtico deve ser o valor de 5,691, para que não ocorra a formação da rótula no topo do pilar direito.

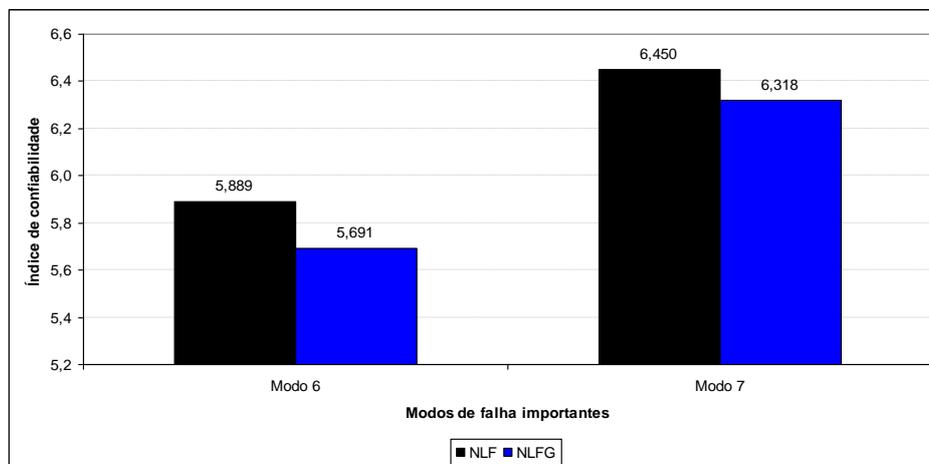


Figura 11 – Índices de confiabilidade para os modos de falha importantes.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho apresentou um modelo acoplado para análise de confiabilidade de pórticos planos em concreto armado, considerando comportamento não-linear físico dos materiais e geométrico da estrutura. A ferramenta computacional com base no acoplamento MEF/FORM mostrou-se estável, sempre convergindo para os pontos de projeto, mesmo diante do comportamento não-linear da estrutura. Com relação aos tempos de processamento, verificou-se que a consideração do comportamento não-linear geométrico acarretou mais tempo do que apenas as não-linearidades físicas dos materiais para a solução do problema. Os resultados do estudo mostraram a importância de se utilizar a não-linearidade geométrica combinada ao comportamento não-linear dos materiais na avaliação da segurança de pórticos em concreto armado e, sobretudo, sob uma abordagem probabilística via teoria da confiabilidade. A análise considerando somente as incertezas através de coeficientes parciais de segurança pode não retratar adequadamente a segurança da estrutura, podendo conduzir a casos que resultem contra a segurança. Diante disso, sugere-se o uso da teoria da confiabilidade estrutural, pois esta permite considerar as incertezas de forma mais realista, avaliando, portanto, mais precisamente a margem de segurança das estruturas contra os diversos estados limites.

6 AGRADECIMENTOS

À FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo suporte financeiro no Brasil e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa no exterior. Em especial, ao professor Wilson Sergio Venturini (*in memoriam*) pela dedicação, solicitude e amizade ao longo de toda a vida profissional.

7 REFERÊNCIAS

- AQUES, Y.; CHATEAUNEUF, A. Reliability-based optimization of structural systems by adaptive target safety – Application to RC frames. **Structural Safety**, v. 30, p. 144-161, 2008.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: projeto de estruturas de concreto – procedimento**. Rio de Janeiro, 2003.
- BECK, A.T. **Curso de confiabilidade estrutural**. São Carlos, SP: EESC-USP, 2006. (Notas de Aula).
- BRANCO, A.L.L.V. **Análise não-linear de pórticos planos considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo dos esforços e deslocamentos**. 2002. 107 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- FRANGOPOL, D.M. et al. A new look at reliability of reinforced concrete columns. **Structural Safety**, v. 18, n. 2/3, p. 123-150, 1996.
- FRANGOPOL, D.M.; IMAI, K. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. II: theory. **Computer and Structures**, v. 77, p. 693-709, 2000.
- GHALI, A.; NEVILLE, A.M.; BROWN, T.G. **Structural analysis: a unified classical and matrix approach**. 6th edition, Spon Press, 2009. 835 p.
- HASOFER, A.M.; LIND, N.C. Exact and invariant second moment code format. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 100, n. EM1, p. 111-121, feb., 1974.
- IMAI, K.; FRANGOPOL, D.M. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. I: theory. **Computer and Structures**, v. 77, p. 677-691, 2000.
- LEONEL, E.D. **Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga**. 2009. 421 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure**. 1984. Thèse (Doctorat d'État) – Université Paris 6, Paris, 1984.
- NEVES, R.A. et al. Reliability analysis of reinforced concrete grids with nonlinear material behavior. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 91, p. 735-744, 2006.
- NOGUEIRA, C.G. **Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado**. 2010. 353 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

NOGUEIRA, C.G.; VENTURINI, W.S. Dimensionamento ótimo de barras de concreto armado com restrições dadas em índices de confiabilidade. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**, Passo Fundo, v. 3, n. 2, p. 69-83, 2006.

PAULA, C.F. **Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas**. 2001. 157 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

RACKWITZ, R.; FIESSLER, B. Structural reliability under combined random load sequences. **Computer and Structures**, v. 9, p. 489-494, 1978.

SOARES, R.C. et al. Reliability analysis of non-Linear reinforced concrete frames using the response surface method. **Reliability Engineering & System Safety**, v. 75, p. 1-16, 2002.