

TRATAMENTO DAS INTEGRAIS SINGULARES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Aref Kalilo Lima Kzam¹ & Humberto Breves Coda²

Resumo

A formulação do método dos elementos de contorno fundamenta-se na modelagem numérica de equações integrais. No problema singular, as equações integrais apresentam núcleos impróprios que dificultam sua avaliação. Neste trabalho apresenta-se uma estratégia eficiente de regularização das equações integrais de contorno denominado método da subtração de singularidade. Aplica-se a subtração de singularidade na avaliação das equações integrais de deslocamento e de força de superfície sobre elementos de contorno curvos. Para validar a formulação apresentam-se os resultados obtidos com o código computacional na avaliação de problemas clássicos da elasticidade linear.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno. Elementos curvos de ordem qualquer. Equações integrais singulares. Método da subtração de singularidade.

TREATMENT OF SINGULAR INTEGRAL OF BOUNDARY ELEMENT METHOD

Abstract

The formulation of the boundary element method is based on numerical modeling of the integral equations. Singular problem, the integral equations have singular kernels hindering their evaluation. This paper presents an efficient strategy for the regularization of the boundary integral equation called subtraction of singularity method. Use this method in the displacement and traction integral equations upon curved boundary element. To validate the formulation presents the result obtained with the code in the evaluation of classical problem of linear elasticity.

Keywords: Boundary Element Method. Curved element of any order. Singular integrals equations. Subtraction of singularity method.

1 INTRODUÇÃO

Problemas da engenharia, em geral, são representados em termos de equações integrais ou equações diferenciais. Em muitos casos as soluções analíticas dessas equações não são triviais. Por esse motivo é necessário se recorrer a estratégias numéricas de resolução. O método dos elementos de contorno (MEC) é uma dessas estratégias. O MEC é utilizado na resolução numérica das equações integrais e consiste em algebrizar as equações integrais por meio de entes matemáticos discretos denominados elementos de contorno.

Um caso especial na modelagem com o MEC ocorre quando as equações integrais apresentam núcleos impróprios. Sob o ponto de vista numérico, o sistema algébrico torna-se indeterminado. Visando transpor essa dificuldade propõem-se um método de regularização com base no procedimento apresentado em (ALIABADI, HALL, 1989), (CODA, 2000) e (KZAM, 2009). A seguir

¹ Mestre em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, aklkzaml@sc.usp.br

² Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, hbcodal@sc.usp.br

apresentam-se as ferramentas necessárias para realizar esse procedimento, para em seguida se introduzir a formulação matemática do método da subtração de singularidade.

2 EQUAÇÕES INTEGRAIS DA ELASTICIDADE LINEAR

As equações integrais de contorno do MEC podem ser obtidas de varias maneiras, uma delas é por meio do método dos resíduos ponderados aplicado sobre a equação diferencial de equilíbrio:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + f_i) u_i^* d\Omega = 0. \quad (1)$$

Da Eq. (1), obtém-se a representação integral da elasticidade linear:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} f_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} f_i^* u_i d\Omega. \quad (2)$$

As equações integrais são obtidas ao se considerar o ponderador como uma solução da equação diferencial, denominado, solução fundamental. Nesse trabalho, o problema é avaliado sobre o domínio de um sólido homogêneo e isotrópico com contorno localizado no infinito sob a ação de um carregamento concentrado. Devido o significado abstrato do carregamento concentrado, é possível representá-lo por uma função especial dada pela distribuição delta de Dirac:

$$f_i^* = \delta(X', X) \hat{e}_i. \quad (3)$$

A solução desse problema foi apresentada por Kelvin e é obtida a partir da solução da equação diferencial de equilíbrio estático:

$$\mu u_{i,jj}^* (X', X) + (\mu + \lambda) u_{j,ij}^* (X', X) + \delta(X', X) \hat{e}_i = 0. \quad (4)$$

A solução da Eq. (4) pode ser realizada utilizando diversas metodologias, a seguir obtém-se a solução fundamental a partir de uma função potencial bastante conhecida na literatura.

2.1 Solução fundamental de Kelvin

Segundo (WANG, et al., 2008) o deslocamento fundamental pode ser escrito em termos de um potencial vetorial desacoplado denominado vetor de Boussinesq-Galerkin, dado por:

$$u_i^* = (2\mu + \lambda) \varphi_{i,kk} - (\mu + \lambda) \varphi_{k,ik}. \quad (5)$$

Que ao ser substituído na Eq. (4) resulta:

$$\mu(2\mu + \lambda) \varphi_{i,kkij} + \delta(X', X) \hat{e}_i = 0. \quad (6)$$

O procedimento de resolução da Eq. (6), para o problema bidimensional, é apresentada em (Kzam, 2009). Essa solução em termos do deslocamento e das forças de superfície é dada, respectivamente por:

$$u_i^* = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln|r| \delta_{ij} - r_i r_j \right] \hat{e}_j. \quad (7)$$

$$t_i^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_i r_j \right] + (1-2\nu) \left[r_j n_i - r_i n_j \right] \right\} \hat{e}_j. \quad (8)$$

As soluções fundamentais (7) e (8) são utilizadas na formulação das equações integrais de contorno de problemas elástico lineares, homogêneos e isotrópicos, como será apresentado a seguir.

2.2 Equação integral de contorno com pontos fontes no domínio

A equação integral de contorno com os pontos fonte no domínio resulta da aplicação da propriedade de seleção da distribuição de Dirac sobre a Eq. (2), assim como da utilização das soluções fundamentais no núcleo das integrais. A equação integral resultante dessas considerações pode ser escrita como:

$$u_i(X') = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(X', x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(X', x) u_j(x) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^*(X', X) f_j(X) d\Omega, \quad (9)$$

Sendo, $u_j(x)$ e $t_j(x)$, os deslocamentos e as forças de superfície no contorno Γ .

A equação integral (9) é também denominada de identidade Somigliana. A partir da Eq. (9) é possível se obter a equação integral das tensões com pontos fonte no domínio:

$$\sigma_{ij}(X') = \int_{\Gamma} D_{kij}^*(X', x) t_k(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij}^*(X', x) u_k(x) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}^*(X', X) f_k(X) d\Omega. \quad (10)$$

Sendo, D_{kij}^* e S_{kij}^* , as respectivas derivadas das soluções fundamentais dos deslocamentos e das forças de superfícies, cuja expressão é:

$$D_{kij}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)(r_i \delta_{jk} + r_j \delta_{ki} - r_k \delta_{ij}) + 2r_i r_j r_k \right\}. \quad (11)$$

$$S_{kij}^* = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{array}{l} 2r_{,n} \left[(1-2\nu)r_k \delta_{ij} + \nu(r_j \delta_{ik} + r_i \delta_{jk}) - 4r_i r_j r_k \right] \\ + 2\nu(n_i r_j r_k + n_j r_i r_k) + (1-2\nu)(2n_k r_i r_j + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ -(1-4\nu)n_k \delta_{ij} \end{array} \right\}. \quad (12)$$

Obtida as equações integrais de contorno com pontos fonte no domínio, apresentam-se agora as equações integrais de contorno com os pontos fonte no contorno.

2.3 Equação integral de contorno com pontos fontes no contorno

Nesse caso, as equações integrais de contorno apresentam núcleos impróprios, visto que, para $X' \in \Omega \rightarrow x' \in \Gamma$ conduz a $r \rightarrow 0$. Essas considerações implicam em algumas particularidades acerca da definição da continuidade das integrais. De maneira geral, os núcleos das integrais obedecem à condição de continuidade de Holder.

A equação integral dos deslocamentos com os pontos fontes no contorno resulta do limite da Eq. (9) fazendo $X' \rightarrow x'$, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$C_{ij}(x')u_i(x') + \oint_{\Gamma} T_{ij}^*(x', x)u_j(x)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(x', x)t_j(x)d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ij}^*(x', X)f_j(X)d\Omega. \quad (13)$$

Sendo, $C_{ij}(x') = \frac{1}{2}\delta_{ij}(x')$, para contornos suáveis, e $\oint(\cdot)d\Gamma$, a integral imprópria com o valor principal de Cauchy.

Procedendo-se o mesmo limite, agora sobre a integral de contorno das tensões, obtém-se:

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}(x') = \oint_{\Gamma} D_{kij}^*(x', x)t_k(x)d\Gamma - \oint_{\Gamma} S_{kij}^*(x', x)u_k(x)d\Gamma + \oint_{\Omega} D_{kij}^*(x', X)f_k(X)d\Omega. \quad (14)$$

Sendo, $\oint(\cdot)d\Gamma$, a integral com a parte finita de Hadamard.

Aplicando a lei de Cauchy, $t_j = \sigma_{ij}n_i$, sobre a Eq. (14) é possível obter a equação integral para as forças de superfície:

$$\frac{1}{2}t_j(x') = n_i(x') \oint_{\Gamma} D_{kij}^*(x', x)t_k(x)d\Gamma - n_i(x') \oint_{\Gamma} S_{kij}^*(x', x)u_k(x)d\Gamma + n_i(x') \oint_{\Omega} D_{kij}^*(x', X)f_k(X)d\Omega. \quad (15)$$

As equações integrais (13), (14) e (15) são as formulações integrais diretas da elasticidade linear utilizada no MEC. A seguir, apresenta-se a metodologia aplicada na discretização dessas equações.

2.4 Método dos Elementos de Contorno

Para se efetuar a solução numérica das equações integrais apresentadas anteriormente é necessário dividir o contorno do problema em um número discreto de segmentos chamados elementos de contorno. Aplicando essa divisão e admitindo-se a ausência de forças de superfície no domínio, as Eq. (13) e (15) assume a forma discreta:

$$\frac{1}{2}u_i(x') + \oint_{\Gamma_n} T_{ij}^*(x', x)u_j(x)d\Gamma_n = \int_{\Gamma_n} U_{ij}^*(x', x)t_j(x)d\Gamma_n. \quad (16)$$

$$\frac{1}{2}t_j(x') = n_i(x') \oint_{\Gamma_n} D_{kij}^*(x', x)t_k(x)d\Gamma_n - n_i(x') \oint_{\Gamma_n} S_{kij}^*(x', x)u_k(x)d\Gamma_n. \quad (17)$$

A maneira mais direta de se representar, tanto as variáveis associadas ao contorno, como a geometria é por meio da representação paramétrica dessas grandezas. A representação mais comum é quando se aplicam as mesmas funções de interpolação para representar a geometria e as variáveis, denominada formulação isoparamétrica. Com essa representação, os deslocamentos, as forças de superfície e a geometria podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 u_j &= \phi_i(\xi) u_j^i, \\
 t_j &= \phi_i(\xi) t_j^i, \\
 x_j &= \phi_i(\xi) x_j^i.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Sendo, ξ , a variável associada ao sistema de coordenadas adimensional avaliado no intervalo $-1 \leq \xi \leq +1$, e $\phi_i(\xi)$, as funções de forma obtidas a partir do polinômio de Lagrange, calculadas por meio do seguinte produto:

$$\phi_i(\xi) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}.
 \tag{19}$$

Ao se transferir o intervalo de integração das Eq. (16) e (17) para intervalo de $[-1, +1]$ no sistema de coordenadas adimensionais e substituir as variáveis dessas equações pelas suas respectivas aproximações, obtém-se:

$$\frac{1}{2} u_i^c + T_{ij}^{clm} u_j^{lm} = U_{ij}^{clm} t_j^{lm},
 \tag{20}$$

$$\frac{1}{2} t_j^c = D_{kij}^{clm} t_j^{lm} - S_{kij}^{clm} u_j^{lm}.
 \tag{21}$$

Sendo:

$$U_{ij}^{clm} = \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) U_{ij}^*(x^c, x) J_l(\xi) d\xi, \text{ e}
 \tag{22}$$

$$T_{ij}^{clm} = \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) T_{ij}^*(x^c, x) J_l(\xi) d\xi,
 \tag{23}$$

os coeficientes das matrizes de influência que trazem nos núcleos das integrais, as soluções fundamentais da formulação em deslocamento, e

$$D_{ki}^{clm} = \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) D_{ki}^*(x^c, x) J_l(\xi) d\xi, \text{ com } D_{ki}^* = n_j(x') D_{kij}^*(x', x), \text{ e}
 \tag{24}$$

$$S_{ki}^{clm} = \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) S_{kij}^*(x^c, x) J_l(\xi) d\xi, \text{ com } S_{ki}^* = n_j(x') S_{kij}^*(x', x),
 \tag{25}$$

os coeficientes das matrizes de influência que trazem nos núcleos das integrais, as derivadas da soluções fundamentais utilizadas na formulação em força de superfície.

O jacobiano da transformação é calculado como:

$$J_l(\xi) = \sqrt{\phi_{m,\xi}(\xi) x_i^{lm} \cdot \phi_{m,\xi}(\xi) x_i^{lm}}.
 \tag{26}$$

Aplicando-se o método da colocação pontual, a solução das equações integrais fica representada algebricamente em termos das suas matrizes de influência, ou seja:

$$Hu = Gt.
 \tag{27}$$

Ao se substituir as condições de contorno do problema o sistema resultante passa a ser escrito como:

$$AX = B. \quad (28)$$

sendo possível se obter a solução final do problema.

Porém, no procedimento numérico ocorre um caso especial durante a resolução das integrais de contorno, que é quando o ponto fonte coincide com o ponto campo no contorno. Essa situação implica um valor impróprio nas integrais (22) a (25). Para contornar esse problema adota-se um procedimento de regularização das integrais para os pontos no contorno, denominado Método da Subtração de Singularidade que será descrito a seguir.

3 MÉTODO DA SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE

Nesta seção apresentam-se as considerações acerca do método da subtração de singularidade (MSS) utilizado para avaliar os valores principais que surgem nas matrizes de influência. O método consiste em remover a singularidade da solução fundamental ao se subtrair a parte singular da integral imprópria utilizando um integrando com a mesma natureza, porém, avaliado sobre o elemento auxiliar, cujas integrais remanescentes são calculadas numérica e analiticamente.

A interpretação geométrica desse procedimento conduz a uma avaliação dos termos singulares sobre um elemento auxiliar com geometria reta bem definida. A Figura 1 ilustra o resultado da expansão em série de Taylor do elemento de contorno curvo sobre o nó singular, além do sentido da integração sobre o elemento auxiliar.

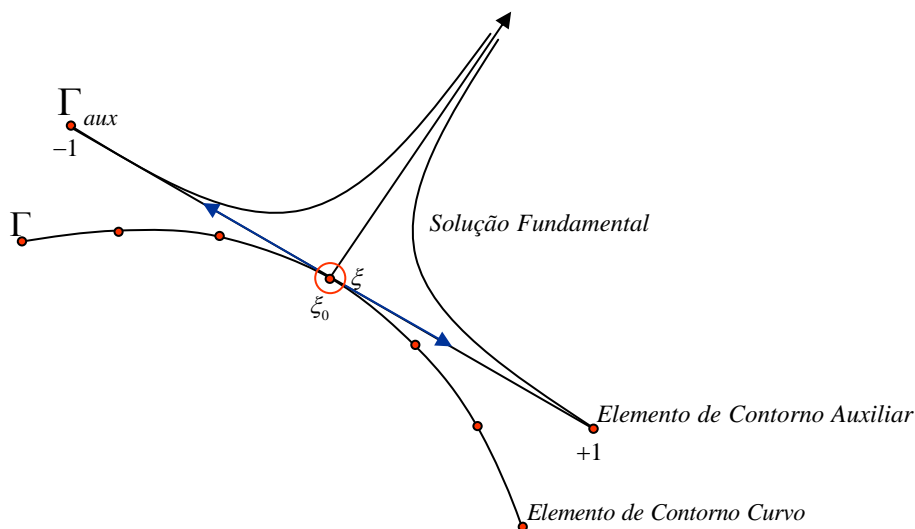


Figura 1 – Problema fundamental.

Procedendo-se a expansão em série de Taylor até a primeira ordem para a geometria é possível verificar a relação:

$$r(\xi_0) = J(\xi_0) |\xi - \xi_0|. \quad (29)$$

Tendo em mãos esse resultado desenvolvem-se as expressões do MSS na avaliação das equações integrais tanto para as formulações em deslocamento quanto para a formulação em força de superfície.

3.1 Formulação em deslocamento

Sabe-se que a formulação em deslocamento apresenta integrais impróprias com singularidades de ordem $O(\ln(r))$ e $O(r^{-1})$ que podem ser calculadas por meio dos valores principais de Cauchy. Essa equação apresenta dois núcleos impróprios. Aplica-se primeiramente o MSS ao núcleo com singularidade do tipo $O(\ln(r))$.

Seja a parcela:

$$\int_{\Gamma} U_{ij}^*(x', x) t_j(x) d\Gamma. \quad (30)$$

Transformando o sistema de coordenadas globais para o sistema de coordenadas adimensionais “ ξ ”, obtém-se:

$$t_j^{lm} \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) U_{ij}^*(\xi_0, \xi) J_l(\xi) d\xi. \quad (31)$$

Simplificando a solução fundamental e escrevendo-a convenientemente com a introdução de duas novas constantes, U_1 e U_2 , têm-se:

$$U_{ij}^*(\xi_0, \xi) = U_1 \ln(r(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} + U_2 r_{,i} r_{,j}. \quad (32)$$

Com $U_1 = \frac{-(3-4\nu)}{8\pi\mu(1-\nu)}$ e $U_2 = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)}$ as novas constantes, definidas aqui, apenas para facilitar a implementação numérica do método. Substituindo-se a solução fundamental simplificada da Eq. (32), na Eq. (31), tem-se:

$$\int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi) \ln(r(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} J_l(\xi) d\xi + \int_{-1}^{+1} U_2 \phi_m(\xi) r_{,i} r_{,j} J_l(\xi) d\xi. \quad (33)$$

Omite-se o termo que acompanha a força de superfície pelo fato dele representar um valor constante, porém ao final do desenvolvimento esse valor será considerado.

A equação (33) possui duas parcelas de naturezas distintas, a parcela que contém a constante U_1 , com núcleo de natureza singular $r \rightarrow 0$, e a parcela com a constante U_2 , com núcleo regular e limitado.

Na regularização com o MSS se subtrai e se soma à parcela singular, uma integral com a mesma natureza, só que avaliada sobre o elemento auxiliar. Aplicando-se o MSS a primeira parcela da Eq. (33), resulta:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi) \ln(r(\xi_0, \xi)) J_l(\xi) \delta_{ij} d\xi \\ & - \int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(r(\xi_0)) J_l(\xi_0) \delta_{ij} d\xi + \int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(r(\xi_0)) J_l(\xi_0) \delta_{ij} d\xi. \end{aligned} \quad (34)$$

O primeiro termo da expansão em série da função de forma e do jacobiano é suficiente para regularizar a integral imprópria da parcela singular. Substituindo a Eq. (29) na Eq. (34), encontra-se:

$$\int_{-1}^{+1} \left[U_1 \phi_m(\xi) \ln(r(\xi_0, \xi)) J_l(\xi) \delta_{ij} - U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(J_l(\xi_0) |\xi - \xi_0|) J_l(\xi_0) \delta_{ij} \right] d\xi$$

$$+ \int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(J_l(\xi_0) |\xi - \xi_0|) J_l(\xi_0) \delta_{ij} d\xi. \quad (35)$$

A análise limite da equação (35) permite verificar que a parcela entre colchetes é limitada, podendo ser avaliada numericamente. Agrupando-se todas as parcelas regulares, em uma única equação, obtém-se:

$$\int_{-1}^{+1} \left[U_1 \phi_m(\xi) \ln(r(\xi_0, \xi)) J_l(\xi) \delta_{ij} - U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(J_l(\xi_0) |\xi - \xi_0|) J_l(\xi_0) \delta_{ij} \right] d\xi$$

$$+ \int_{-1}^{+1} U_2 \phi_m(\xi) r_{,i} r_{,j} J_l(\xi) d\xi. \quad (36)$$

A parcela com núcleo impróprio presente na Eq. (36) será avaliada no sentido do valor principal de Cauchy, por mais que não haja essa necessidade devido a ordem de singularidade ser do tipo $O(\ln(r))$. Assim:

$$\int_{-1}^{+1} U_1 \phi_m(\xi_0) \ln(J_l(\xi_0) |\xi - \xi_0|) J_l(\xi_0) \delta_{ij} d\xi. \quad (37)$$

Procedendo a substituição de variável $\varepsilon = \xi - \xi_0$. Os limites de integração são modificados para $[-1 - \xi_0, +1 - \xi_0]$. A equação (37) é reescrita da seguinte forma:

$$U_1 \phi_m(\xi_0) J_l(\xi_0) \delta_{ij} \{VPC\}. \quad (38)$$

$$\text{Com } \{VPC\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \ln(J_l(\xi_0) \varepsilon) d\varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+1-\xi_0} \ln(J_l(\xi_0) \varepsilon) d\varepsilon \right\}, \text{ a integral avaliada no sentido}$$

do valor principal de Cauchy, que resulta:

$$\{VPC\} = (1 + \xi_0) \ln|(1 + \xi_0) J_l(\xi_0)|$$

$$+ (1 - \xi_0) \ln|(1 - \xi_0) J_l(\xi_0)| - [(1 + \xi_0) + (1 - \xi_0)]. \quad (39)$$

O procedimento descrito para a solução fundamental dos deslocamentos é estendido para as demais soluções fundamentais que surgem nas equações integrais de contorno. A seguir apresenta-se o MSS na regularização das demais integrais.

Seja a integral:

$$\int_{\Gamma} T_{ki}^*(x', x) u_i(x) d\Gamma. \quad (40)$$

Nessa integral, a solução fundamental é imprópria com singularidade de ordem $O(r^{-1})$. Por conveniência, representa-se a solução fundamental por:

$$T_{ij}^*(x', x) = \frac{\bar{T}_{ij}^*(x', x)}{r(x', x)}. \quad (41)$$

Sendo $\bar{T}_{ki}^*(x', x)$, um termo auxiliar da solução fundamental em força de superfície e que contém apenas núcleo regular.

Substituindo a relação (41) na Eq. (40), e mudando o sistema de coordenadas globais para o sistema de coordenadas adimensionais escreve-se:

$$\left[\int_{\Gamma} \phi_m(\xi) \frac{\bar{T}_{ki}^*(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi \right] u_i^{lm}. \quad (42)$$

Nesse caso verifica-se que todas as parcelas da solução fundamental são singulares em razão do produto de \bar{T}_{ki} por r^{-1} . Aplicando-se o MSS a essa equação, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} \left[\phi_m(\xi) \frac{\bar{T}_{ki}^*(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ki}^*(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} \right] d\xi \\ & + \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ki}^*(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} d\xi. \end{aligned} \quad (43)$$

Ao se realizar uma análise limite sobre a Eq. (43), verifica-se que o termo entre colchetes é limitado e pode ser calculado por meio da quadratura de Gauss-Legendre. A parcela restante deve ser calculada analiticamente no sentido do valor principal de Cauchy:

$$\oint_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{T}_{ki}^*(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} d\xi. \quad (44)$$

Procedendo-se a mudança de variável $\varepsilon = \xi - \xi_0$, os limites de integração passam a ser $[-1 - \xi_0, +1 - \xi_0]$. Reescrevendo a Eq. (44), tem-se:

$$\phi_m(\xi_0) \bar{T}_{ki}^*(\xi_0) \{VPC\}. \quad (44)$$

Sendo $\{VPC\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right\}$, a integral no sentido do valor principal de Cauchy,

e dada por:

$$\{VPC\} = -\ln|1 + \xi_0| + \ln|1 - \xi_0|. \quad (45)$$

Posto as demonstrações do MSS à todas as parcelas formulação em deslocamento, apresenta-se agora o mesmo procedimento para a formulação em força de superfície cujas equações são bastante utilizadas em diversos problemas da engenharia, como mecânica da fratura, fadiga e contato.

3.2 Formulação em força de superfície

Na formulação em força de superfície bidimensional, as integrais impróprias apresentam singularidade de ordem $O(r^{-1})$ e $O(r^{-2})$.

Inicia-se a subtração de singularidade avaliando-se a integral:

$$n_i(x') \oint_{\Gamma} D_{kij}^*(x', x) t_k(x) d\Gamma. \quad (46)$$

Escrevendo a solução fundamental convenientemente, tem-se:

$$D_{kij}^*(x', x) = \frac{\bar{D}_{kij}^*(x', x)}{r(x', x)}. \quad (47)$$

Sendo $\bar{D}_{kij}^*(x', x)$ a expressão auxiliar, não singular, utilizada para facilitar a implementação das soluções fundamentais. Substituindo a Eq. (47) na Eq. (46), tem-se:

$$n_i(x') \oint_{\Gamma} \frac{\bar{D}_{kij}^*(x', x)}{r(x', x)} t_k(x) d\Gamma. \quad (48)$$

Mudando o sistema de referencia global para o sistema de coordenadas adimensional “ ξ ”, a expressão (48) fica escrita como:

$$n_i(\xi_0) \left[\oint_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi \right] t_k^{lm}. \quad (49)$$

Aplicando-se o MSS sobre o núcleo integral da Eq. (49) encontra-se:

$$\begin{aligned} n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \left[\phi_m(\xi) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0, \xi)}{r(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} \right] d\xi \\ + n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{D}_{kij}(\xi_0)}{|\xi - \xi_0|} d\xi. \end{aligned} \quad (50)$$

A integral entre os colchetes é limitada, logo é regular e por isso é avaliada numericamente por meio da quadratura de Gauss-Legendre. A integral remanescente é avaliada analiticamente por meio do valor principal de Cauchy, dado por:

$$n_i(\xi_0) \phi_m(\xi_0) \bar{D}_{kij}(\xi_0) \oint_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \quad (51)$$

Com a integral do valor principal dada por $\oint_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon = \ln|1-\xi_0| - \ln|1+\xi_0|$.

Por fim, apresenta-se o MSS aplicado na avaliação da integral com as derivadas das soluções fundamentais em forças de superfície cuja ordem de singularidade é igual a $O(r^{-2})$.

Seja a integral:

$$n_i(x') \oint_{\Gamma} S_{kij}^*(x', x) u_k(x) d\Gamma. \quad (52)$$

Mudando o sistema de referencia global para o sistema de coordenadas adimensionais “ ξ ”, resulta:

$$n_i(\xi_0) \left[\oint_{-1}^{+1} \phi_m(\xi) \frac{\bar{S}_{kij}^*(\xi_0, \xi)}{r^2(\xi_0, \xi)} J_l(\xi) d\xi \right] u_k^{lm}. \quad (53)$$

Para o caso de integrais impróprias com singularidades de ordem $O(r^{-2})$ é necessário considerar a expansão em série Taylor até o termo linear das funções de forma. Esse termo é suficiente para que a integral seja avaliada no sentido do valor principal de Cauchy e da parte finita de Hadamard.

$$\begin{aligned}
 n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} & \left[\phi_m(\xi) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0, x(\xi))}{r^2(\xi_0, x(\xi))} J_l(\xi) - \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2} \right. \\
 & \left. - \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)|\xi - \xi_0|} \right] d\xi \\
 + n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} & \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)(\xi - \xi_0)^2} d\xi + n_i(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)|\xi - \xi_0|} d\xi.
 \end{aligned} \tag{54}$$

A integral entre os colchetes é regular e por isso pode ser avaliada numericamente por meio da quadratura de Gauss-Legendre. As integrais fora dos colchetes, são integrais impróprias no sentido de Hadamard e Cauchy, respectivamente. Essas integrais podem ser avaliadas analiticamente sobre o elemento auxiliar, por meio das equações:

$$n_i(\xi_0) \phi_m(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon \right\}. \tag{55}$$

Sendo a parte finita de Hadamard calculada como:

$$\int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon = -\frac{1}{1+\xi_0} - \frac{1}{1-\xi_0}. \tag{55}$$

Para o valor principal de Cauchy, tem-se $n_i(\xi_0) \phi_{m,\xi}(\xi_0) \frac{\bar{S}_{kij}(\xi_0)}{J_l(\xi_0)} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon \right\}$ com o resultado

da integral dado da mesma forma como na Eq. (51), sendo $\bar{S}_{kij}(\xi_0)$ a solução fundamental auxiliar avaliada no nó singular.

A seguir apresentam-se alguns exemplos avaliados com o código computacional que incorpora essas duas formulações. Objetiva-se com isso validar o método da subtração de singularidade para que ele possa ser utilizado como uma estratégia geral de tratamento das integrais singulares.

4 RESULTADOS

Apresentam-se dois exemplos com intuito de validar a formulação.

O primeiro problema consiste no cilindro pressurizado com uma pressão interna constante, conforme a Figura 2. Nesse exemplo avaliam-se as tensões radiais dos nós distribuídos ao longo da espessura do cilindro.

Utilizam-se nesses cálculos as formulações singulares em deslocamento e em forças de superfície aplicadas ao modelo com uma malha de 128 elementos de contorno com aproximação cúbica. Nessa malha utiliza-se 64 elementos para discretizar o contorno externo e outros 64 elementos para discretizar o contorno interno.

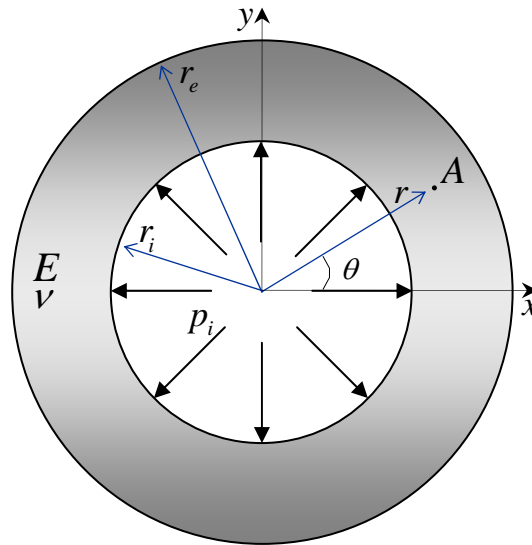


Figura 2 – Cilindro pressurizado com pressão Interna constante.

Os dados do problema são os seguintes:

Análise: Estado plano de deformação.

Módulo de elasticidade do material: $E = 7,3 \times 10^5 \text{ MPa}$.

Coefficiente de Poisson: $\nu = 0,32$.

Pressão interna: $p_i = 100,0 \text{ MPa}$.

Raio externo: $r_e = 100,0 \text{ cm}$.

Raio interno: $r_i = 50,0 \text{ cm}$.

As tensões radiais e os seus respectivos erros em relação a solução analítica são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – Tensão radial dos nós de domínio

r (cm)	Análítico (MPa)	CPPI-M128G3-U (MPa)	Erro (%)	CPPI-M128G3-T (MPa)	Erro (%)
55	-76.85950	-77.18242	0.420	-76.68985	0.221
60	-59.25926	-59.29900	0.067	-59.05375	0.347
65	-45.56213	-45.56412	0.004	-45.40285	0.350
70	-34.69388	-34.69344	0.001	-34.56550	0.370
75	-25.92593	-25.93295	0.027	-25.81625	0.423
80	-18.75000	-18.76948	0.104	-18.65067	0.530
85	-12.80277	-12.84414	0.323	-12.71017	0.723
90	-7.81893	-7.92267	1.327	-7.75211	0.855
95	-3.60111	-4.11747	14.339	-3.84343	6.729

O segundo exemplo a ser estudado consiste no problema da cavidade circular pressurizada no meio infinito, conforme a Figura 3. Avalia-se esse exemplo para constatar a potencialidade do método dos elementos de contorno em representar problemas inseridos em meios infinitos procedendo-se apenas a discretização do contorno da cavidade.

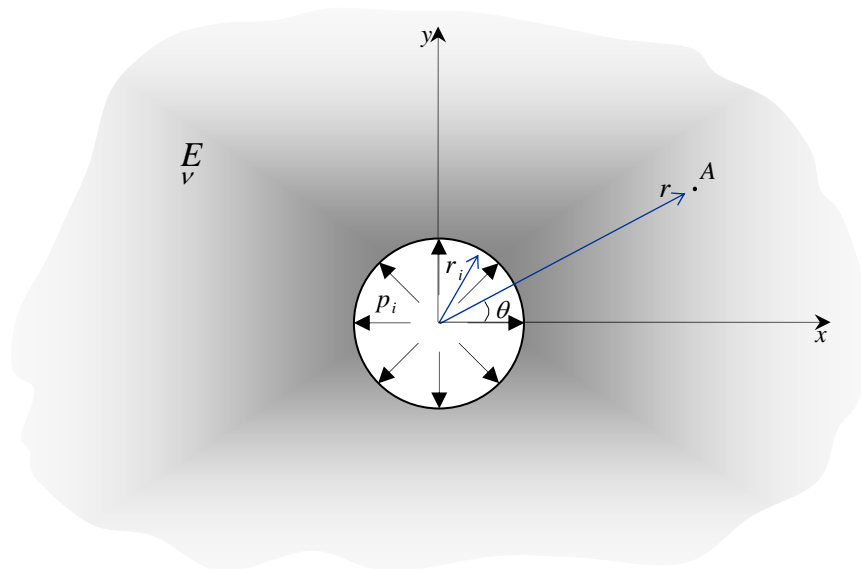


Figura 3 – Cilindro pressurizado com pressão Interna constante.

Os dados do problema são:

Análise: Estado plano de deformação,

Módulo de elasticidade do meio: $E = 2,05 \times 10^4 \text{ KN/cm}^2$,

Coefficiente de Poisson do meio: $\nu = 0,3$,

Pressão: $p_i = 100,0 \text{ KN/cm}^2$, e

Raio: $r_i = 10,0 \text{ m}$.

Calculam-se os deslocamentos radiais dos nós localizados no meio infinito utilizando-se o modelo com 64 elementos de contorno com aproximações do 1º, 3º e 5º grau das formulações em deslocamento e em força de superfície. Os resultados desse exemplo são apresentados nas Tabelas 2 e 3.

Tabela 2 – Deslocamento radial dos nós de domínio. Formulação em deslocamento

r (m)	Analítico (mm)	CPMI-M64G1-U (mm)	Erro (%)	CPMI-M64G3-U (mm)	Erro (%)	CPMI-M64G5-U (mm)	Erro (%)
15	42.27642	42.19862	0.18	42.36751	0.22	42.35782	0.19
20	31.70732	31.62537	0.26	31.78574	0.25	31.78164	0.23
25	25.36585	25.29244	0.29	25.43386	0.27	25.43157	0.26
30	21.13821	21.07341	0.31	21.19757	0.28	21.19611	0.27
35	18.11847	18.06101	0.32	18.17082	0.29	18.16981	0.28
40	15.85366	15.80226	0.32	15.90034	0.29	15.89959	0.29
45	14.09214	14.04576	0.33	14.13418	0.30	14.13359	0.29
50	12.68293	12.64073	0.33	12.72111	0.30	12.72064	0.30
55	11.52993	11.49127	0.34	11.56489	0.30	11.56450	0.30
60	10.56911	10.53345	0.34	10.60132	0.30	10.60098	0.30
65	9.75610	9.72303	0.34	9.78595	0.31	9.78567	0.30
70	9.05923	9.02841	0.34	9.08705	0.31	9.08679	0.30
75	8.45528	8.42643	0.34	8.48131	0.31	8.48109	0.31
80	7.92683	7.89971	0.34	7.95128	0.31	7.95108	0.31
85	7.46055	7.43497	0.34	7.48360	0.31	7.48342	0.31
90	7.04607	7.02187	0.34	7.06788	0.31	7.06771	0.31
95	6.67522	6.65226	0.34	6.69591	0.31	6.69575	0.31
100	6.34146	6.31962	0.34	6.36114	0.31	6.36099	0.31

Tabela 3 – Deslocamento radial dos nós de domínio. Formulação em força de superfície

r (m)	Analítico (mm)	CPMI-M64G1-T (mm)	Erro (%)	CPMI-M64G3-T (mm)	Erro (%)	CPMI-M64G5-T (mm)	Erro (%)
15	42.27642	41.85219	1.00	42.24214	0.08	42.20249	0.17
20	31.70732	31.35944	1.10	31.69215	0.05	31.67128	0.11
25	25.36585	25.07727	1.14	25.35948	0.03	25.34496	0.08
30	21.13821	20.89298	1.16	21.13582	0.01	21.12461	0.06
35	18.11847	17.90575	1.17	18.11800	0.00	18.10886	0.05
40	15.85366	15.66607	1.18	15.85418	0.00	15.84644	0.05
45	14.09214	13.92449	1.19	14.09318	0.01	14.08646	0.04
50	12.68293	12.53145	1.19	12.68424	0.01	12.67830	0.04
55	11.52993	11.39183	1.20	11.53138	0.01	11.52605	0.03
60	10.56911	10.44223	1.20	10.57061	0.01	10.56577	0.03
65	9.75610	9.63878	1.20	9.75762	0.02	9.75319	0.03
70	9.05923	8.95014	1.20	9.06074	0.02	9.05665	0.03
75	8.45528	8.35335	1.21	8.45677	0.02	8.45297	0.03
80	7.92683	7.83118	1.21	7.92827	0.02	7.92473	0.03
85	7.46055	7.37045	1.21	7.46195	0.02	7.45862	0.03
90	7.04607	6.96093	1.21	7.04743	0.02	7.04430	0.03
95	6.67522	6.59452	1.21	6.67654	0.02	6.67358	0.02
100	6.34146	6.26476	1.21	6.34274	0.02	6.33993	0.02

5 CONCLUSÕES

Com os resultados obtidos após a aplicação do método da subtração de singularidade constata-se a robustez do método, uma vez que se verificam bons resultados para os deslocamentos e as tensões nos problemas analisado, basta verificar o valor do erro relativo apresentado nas tabelas. Destaca-se também a utilização dos polinômios de Lagrange na generalização do grau da aproximação assim como na geração de elementos de contorno curvos o que contribuiu com uma melhora nos resultados.

6 AGRADECIMENTOS

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), que concedeu o auxílio financeiro durante a realização do mestrado.

7 REFERÊNCIAS

ALIABADI, M. H.; HALL, W. S., Two-dimensional boundary element kernel integration using series expansions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 6, n. 3, p. 140-143, Sep., 1989.

CHENG, S. L.; HOWITT, D. G. On the Galerkin vector and the Eshelby solution in linear elasticity. **Journal of Elasticity**, v. 44, n. 1, p. 1-8(8), July, 1996. ISSN: 0374-3535.

CODA, H. B. **Contribuição à análise dinâmica transiente de meios contínuos pelo método dos elementos de contorno**. 2000. 403 p. Tese (Livre Docência em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

KZAM, A. K. L. **Formulação dual em mecânica da fratura utilizando elementos de contorno curvos de ordem qualquer**. 2009. 186 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

WANG, M. Z.; XU, B. X.; GAO, C. F., Recent general solution in linear elasticity and their applications. **Applied Mechanics Reviews**, v. 61, n. 3, p. 37-57, May, 2008. ISSN: 030803.