

MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA PARA ANÁLISIS MODAL OPERACIONAL: TEORIA E REVISÃO

I. D. Gómez Araújo¹, J. D. Villalba Morales², J. Elias Laier³

Resumo

A análise modal operacional aborda a estimativa dos parâmetros modais de uma estrutura a partir de somente medições de resposta dinâmica quando está em operação. Neste artigo apresenta-se uma revisão extensiva do estado da arte dos maiores desenvolvimentos em métodos de identificação para análise modal operacional no domínio da frequência. Primeiro, mostram-se as bases teóricas usadas na identificação modal e seu relacionamento com as equações de movimento estrutural, discutindo também as principais suposições consideradas no seu desenvolvimento. Em seguida, são abordados os principais métodos de identificação que têm sido reportados na literatura, analisando as limitações e vantagens de cada um deles. Assim, observou-se que na atualidade existe um novo enfoque na análise modal operacional baseado no uso de conceitos de transmissibilidade. Métodos baseados em transmissibilidade não precisam levar em conta uma das mais importantes assunções que fazem os métodos tradicionais de identificação que consiste em que a excitação é suposta como ruído branco. Este fato indica que possivelmente este poderia ser o caminho a seguir no desenvolvimento de novos e melhores métodos de identificação modal.

Palavras-chave: Análise modal operacional. Métodos de identificação. Domínio da frequência. Vibrações aleatórias.

Abstract

Operational modal analysis (OMA) deals with the estimation of modal parameters of a structure from vibration data obtained in operational conditions, where only measurements of response are recorded. This paper an extensive review of the major developments in frequency domain identification methods for operational modal analysis is presented. First, the theoretical bases used in modal identification in OMA are revealed with its relationship to the structural equations of motion and discussing the main assumptions on which it is based. Then, the main identification methods that have been reported in the literature are addressed, analyzing the limitations and advantages of each of them. Thus, it was observed that currently exists a new operational modal analysis approach based on the use of concepts of transmissibility. Methods based on transmissibility do not consider one of the most important assumptions of traditional identification methods in which the excitation is assumed as white noise. This fact indicates that possibly this could be a way to go in developing new and better methods of modal identification.

Keywords: Operational modal analysis. Identification methods. Frequency domain. Random Vibrations.

¹ Doutorando em engenharia de estruturas - EESC-USP, igomez19@usp.br

² Professor do departamento de engenharia civil da Universidade Javeriana- Bogotá, Colômbia.

³ Professor do Departamento de engenharia de estruturas da EESC-USP, jelaier@sc.usp.br

1. INTRODUÇÃO

Na literatura conhece-se como análise modal de uma estrutura à determinação dos seus parâmetros modais (frequências naturais, formas modais, amortecimentos modais e fatores de participação modal) tendo-se por base a formulação de um modelo matemático que descreva o comportamento dinâmico da estrutura. Este tipo de análise é amplamente utilizado na abordagem de problemas de vibração como: modificação do comportamento dinâmico das estruturas, atualização de modelos analíticos, dimensionamento dinâmico ótimo e controle de vibrações. Ainda, outro problema que pode ser resolvido a partir do estudo das propriedades dinâmicas da estrutura é aquele da determinação da saúde estrutural, com uma alta aplicabilidade em diferentes setores industriais, tais como aeroespacial, mecânica, petróleo e civil. Exemplos da utilização de análise modal para resolver o problema anterior podem ser observados em alguns trabalhos realizados previamente pelos autores (Villalba, Gomez e Laier, 2010, Villalba e Laier, 2012, Araujo, Maldonado e Cho, 2011).

Sob um ponto de vista experimental, a análise modal realiza-se seguindo uma de duas abordagens. A primeira delas utiliza medições da excitação e da resposta da estrutura como parâmetros de entrada e se conhece como Análise Modal Tradicional (Traditional Modal Analysis TMA), enquanto que um segundo grupo precisa unicamente das medições da resposta da estrutura e se conhece como Análise Modal Operacional (Operational Modal Analysis-OMA).

As primeiras pesquisas em análise modal experimental foram feitas a partir da aproximação de AMT na qual a estrutura é excitada (entrada) em uma ou várias medições com forças dinâmicas conhecidas e a resposta da estrutura (saídas) é registrada em termos de acelerações, velocidades ou deslocamentos (saídas) em uma ou várias locações decorrente destas forças. Finalmente, os parâmetros modais são extraídos das medições de força e resposta na faixa de frequências de interesse. Baseado neste conceito de entrada e saída têm-se desenvolvidos numerosas técnicas ou métodos de identificação modal. Estes métodos são classificados de forma geral dependendo da sua formulação em métodos do domínio do tempo (Time Domain-TD) e no do domínio da frequência (Frequency Domain-FD). Ainda, os métodos podem ser divididos segundo o número de entradas e saídas disponíveis: uma-entrada/uma-saída (Single Input, Single Output-SISO), uma-entrada/múltiplas-saídas (Single Input, Multiple Output -SIMO) ou múltiplas-entradas/múltiplas-saídas (Multiple Input, Multiple Output MIMO). Porém, a AMT tem algumas limitações que são apresentadas a continuação:

- Normalmente, a estrutura é excitada artificialmente com o intuito de se obter as funções de resposta em frequência (FRFs), ou as funções de resposta impulsiva (FRIs). Para medições realizadas em campo e em grandes estruturas, a aplicação desta metodologia torna-se difícil devido à dificuldade de se medir as FRFs e as FRIs. Tal dificuldade se origina com a existência de outros tipos de excitações além da excitação artificial e da necessidade do uso de muita energia para excitar a estrutura, que muitas vezes não é disponível.
- A AMT é realizada, na maioria dos casos, no laboratório. Porém, as condições reais de operação de muitas aplicações industriais podem diferir significativamente das aplicadas no ensaio do laboratório. Além disso, só componentes são ensaiados geralmente e não sistemas completos.

A partir do começo da década de 90 a AMO tem sido usada para caracterização dinâmica de estruturas. AMO, também conhecida como análise de vibrações

ambientais, excitação natural ou só saída (Output-Only), utiliza somente as medições de resposta da estrutura em condições de operação sujeita a excitações ambientais ou naturais (vento, tráfego, tremores, etc) para identificar as características modais. Existem diferentes vantagens a partir do seu uso mostradas em Zhang, Brincker. et al. (2005), como:

- É econômica e rápida de se realizar devido a que não precisa de equipamento para excitar a estrutura nem da simulação das condições de contorno.
- As características dinâmicas do sistema completo, e não somente de alguns componentes, podem ser obtidas, portanto, representam mais fielmente o sistema analisado.
- A realização dos ensaios experimentais não interfere com o uso normal ou operação da estrutura.
- É uma forma atrativa para fazer uma monitorização on-line da saúde estrutural para a detecção de danos baseada nas características dinâmicas como mostrado no trabalho de Magalhaes, Cunha et al. (2012).

Com as anteriores vantagens, este tipo de análise tem recebido uma grande atenção por parte da comunidade da engenharia civil com vistas às aplicações em plataformas de petróleo, prédios, torres e pontes (Brownjohn *et al.*, 1989; Araujo, Maldonado e Cho, 2011; Gentile e Saisi, 2011; Liu *et al.*, 2012; Liu, Loh e Ni, 2013). No entanto, uma das limitações mais comentadas na literatura do uso da Análise Modal Operacional com medições unicamente da resposta são as incertezas contidas nos dados, as quais podem ter origem de diferentes fontes, tais como as variações operacionais e ambientais da estrutura. Esses tipos de variações têm uma influência direta na resposta dinâmica da estrutura e são refletidas na avaliação dos parâmetros dinâmicos. Dessa forma, devido a que os dados podem ser medidos sob condições variáveis, existe a necessidade de normalizar os dados com o fim de estabelecer medições em ciclos similares de condições operacionais e ambientais, para assim facilitar uma comparação (Doebbling *et al.*, 1996).

Devido ao impacto econômico que pode representar OMA na análise dinâmica das estruturas, notado nas suas vantagens e suas notáveis potencialidades para diferentes tipos de aplicações, tem-se observado nos últimos anos um grande incremento na atividade de pesquisa em torno às bases teóricas de OMA e suas possíveis aplicações em diferentes campos da engenharia. Assim, no ano 2005 celebrou-se a primeira versão do International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC) e no ano 2010 o Journal Mechanical System and Signal Processing publicou uma edição especial sobre o tema (Brincker e Kirkegaard, 2010). Nesse sentido, um dos problemas importantes em OMA é a necessidade de se obterem parâmetros modais confiáveis, o que é possível através do desenvolvimento e da aplicação de técnicas robustas de identificação modal que utilizem somente dados de resposta. Assim, no campo prático costuma-se ao uso de varias técnicas de identificação com o fim de validar os parâmetros modais encontrados. O fato anterior implica que uma das áreas de maior pesquisa no campo da análise modal operacional é o desenvolvimento, de técnicas robustas de identificação modal ou a obtenção de melhoras nas técnicas atuais. Assim, na literatura podem-se encontrar alguns artigos que tratam da determinação das potencialidades e deficiências de diferentes métodos de identificação modal desenvolvidos para OMA como em Peeters e De Roeck (2001) e Andersen, Brincker et al. (1999).

Neste trabalho pretende-se apresentar um estado da arte detalhado dos diferentes métodos existentes para realizar a caracterização dinâmica de uma estrutura desde medições unicamente da resposta. Nesse sentido, na seção 2 são estabelecidas as bases teóricas para o desenvolvimento de métodos de identificação no domínio da frequência. A seção 3 apresenta os principais métodos de identificação modal usados em AMO no domínio da frequência, identificando algumas vantagens, desvantagens e limitações. Finalmente, são apresentadas algumas considerações finais que tem em conta a possível temática não abordada na revisão e são dadas as conclusões do trabalho.

2. FUNDAMENTOS ANALITICOS DA ANALISIS MODAL OPERACIONAL.

2.1 VIBRAÇÕES ALEATORIA

Os fundamentos do OMA parte da relação da resposta $x(n)$ e a entrada $f(n)$ em um sistema linear e invariante no tempo (Linear Time-Invariant-LTI). A entrada $f(n)$ e a resposta $x(n)$ são estabelecidos como processos aleatórios no sentido amplo estacionário (Wide-Sense Stationarity-WSS), em que a média não depende do tempo e a covariância depende da separação entre amostras, (n_2-n_1) (Kay, 2006). Portanto, se $x(n)$ e $f(n)$ são processos randômicos WSS e suas covariâncias dependem somente da separação entre amostras pode-se definir um tipo de momento conjunto, chamado de sequência de auto-correlação e correlação cruzada para dados discretos, assim.

$$R_{xx}(k) = R_{xx}(n_2 - n_1) = E\{x(n_1)x(n_2)\} = E\{x(n)x(n+k)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot x(n+k)$$

$$R_{fx}(k) = R_{fx}(n_2 - n_1) = E\{x(n_1)f(n_2)\} = E\{f(n)x(n+k)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot x(n+k) \quad (1)$$

Em que, $n_1 = n$, $n_2 = n + k$, $k = n_2 - n_1$, $R_{xx}(k)$ é a sequência de auto-correlação de $x(n)$, $R_{fx}(k)$ é a correlação cruzada entre $x(n)$ e $f(n)$, $E\{\}$ é o operador da esperança matemática e N é a quantidade de elementos em $x(n)$ e $f(n)$. Se o sistema LTI é submetido a múltiplas excitações aleatórias em pontos definidos, $f_1(t), f_2(t), f_3(t), \dots, f_N(t)$ e considerando uma resposta do sistema nas posições, $x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_N(t)$, umas respostas impulsivas que relacionam as saídas com as entradas $h_{x_1f_1}(t), \dots, h_{x_1f_N}(t), \dots, h_{x_Nf_1}(t), \dots, h_{x_Nf_N}(t)$ e condições iniciais de velocidade e deslocamento iguais à zero, pode ser expressa uma arbitraria resposta do sistema pela suma de diferentes convoluções (Fontul *et al.*, 2004), como.

$$x_k(n) = h_{x_kf_1}(n) \times f_1(n) + h_{x_kf_2}(n) \times f_2(n), \dots, h_{x_kf_N}(n) \times f_N(n)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{x_kf_1}(m) \cdot f_1(n-m) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{x_kf_2}(m) \cdot f_2(n-m), \dots, \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{x_kf_N}(m) \cdot f_N(n-m) \quad (2)$$

$$= \sum_{s=1}^N h_{x_kf_s}(n) \times f_s(n)$$

Utilizando a Equação (1) e (2) para determinar a auto-correlação de $x(n)$ e a correlação cruzada de $x(n)$ com a de $f(n)$ é possível estabelecer as seguintes relações (Hayes, 1996).

$$R_{f_r x_j}(k) = \sum_{s=1}^N R_{f_r f_s}(k) \times h_{x_j f_s}(k) \quad (3)$$

$$R_{x_k x_j}(k) = \sum_{r=1}^N h_{x_k f_r}(-k) \times R_{f_r x_j}(k) \quad (4)$$

Então, com a finalidade de determinar uma relação das correlações da entrada com as correlações das respostas, combinam-se as Equações (3) e (4), resultando a seguinte formulação.

$$R_{x_k x_j}(k) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N h_{x_k f_r}(-k) \times h_{x_j f_s}(k) \times R_{f_r f_s}(k) \quad (5)$$

Em que, $R_{x_k x_j}$ são as funções de correlação da resposta, $R_{f_r f_s}(k)$ são as funções de correlação da entrada, e $h_{x_k f_r}(-k)$ e $h_{x_j f_s}$ são as funções de resposta impulsiva do sistema.

O valor da energia das frequências contidas dentro de um processo randômico WSS é determinado aplicando a transformada de Fourier. Essa medida é conhecida como a densidade espectral de potência (Power Spectral Density- PSD) ou também como Periodograma. A qual é definida para um processo randômico com um intervalo finito de valores, $n= 0, 1, \dots, N-1$, através do estimador da PSD baseada no conhecimento da sequencia de correlação como é definida na relação de Wiener-Khintchine, como (Kay, 2006).

$$\hat{S}_{x_k x_j}(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{x_k x_j}(k) e^{-i\omega k} \quad (6)$$

Com

$$\hat{R}_{x_k x_j}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x_k(n) x_j(n+k) \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (7)$$

É importante expressar que a sequencia de correlação pode ser recuperada da PSD usando a Transformada inversa de Fourier.

$$\hat{R}_{xx}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_{xx}(i\omega) e^{i\omega k} d\omega \quad (8)$$

Retomando as Equações (3), (4) e (5) aplicando a Transformada de Fourier de ambos os membros das equações para combinar elas avaliam-se as PSDs da resposta e a entrada de um sistema LTI, como.

$$S_{f_r x_j}(i\omega) = \sum_{s=1}^N H_{x_j f_s}(i\omega) \cdot S_{f_r f_s}(i\omega) \quad (9)$$

$$S_{x_k x_j}(i\omega) = \sum_{r=1}^N H_{x_k f_r}^*(i\omega) \cdot S_{f_r x_j}(i\omega) \quad (10)$$

$$S_{x_k x_j}(i\omega) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N H_{x_k f_r}^*(i\omega) \cdot H_{x_j f_s}(i\omega) \cdot S_{f_r f_s}(i\omega) \quad (11)$$

Em que, $S_{x_k x_j}$ é a densidade espectral da resposta, $S_{f_r f_s}(i\omega)$ é a densidade espectral da entrada, e $H_{x_k f_r}^*$ ou $H_{x_j f_s}$ são as funções de transferência, com * representando à conjugada complexa.

Neste ponto é importante mencionar que a maioria dos métodos de identificação modal para AMO supõe que as excitações naturais ou ambientais de entrada em um sistema tipo LTI, contêm uma ampla faixa de frequências de igual contribuição tal que todas as frequências naturais da estrutura podem ser excitadas. Esta suposição leva como consequência implícita que a excitação seja considerada como um processo randômico do tipo ruído branco (White Gaussian Noise-WGN).

Assim, tendo dois processos randômicos f_r, f_s WGN diferentes, sendo WSS com média zero, os quais contêm amostras separadas independentes, com idêntica variância σ^2 pode-se definir a correlação, como (Kay, 2006).

$$R_{f_r f_s}(k) = E\{f_r(n)f_s(n+k)\} = \delta_{f_r, f_s} \delta(k) \sigma^2 \text{ Com } \delta(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}, \delta_{f_r, f_s} = \begin{cases} 1 & f=r \\ 0 & f \neq r \end{cases} \quad (12)$$

Para esses mesmos processos randômicos WGN, define-se o PSD, como.

$$S_{f_r f_s}(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{f_r f_s}(k) e^{-i\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^2 \delta_{f_r, f_s} \delta(k) e^{-i\omega k} = \delta_{f_r, f_s} \sigma^2 \quad (13)$$

Portanto, se diferentes processos randômicos de tipo ruído branco Gaussiano são filtrados por um sistema LTI, obtém-se da Equação (11) a seguinte relação.

$$S_{x_k x_j}(i\omega) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N H_{x_k f_r}^*(i\omega) \cdot H_{x_j f_s}(i\omega) \cdot \delta_{f_r, f_s} \sigma^2 \quad (14)$$

Igualmente, para um processo randômico tipo WGN a partir da Equação (5) a auto-correlação de $x(n)$ estabelece-se como.

$$R_{x_k x_j}(k) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N h_{x_k f_r}(-k) \times h_{x_j f_s}(k) \times \delta_{f_r, f_s} \sigma^2 \quad (15)$$

E voltando a uma representação de somatórias de convolução, resulta.

$$R_{x_k x_j}(k) = \sigma^2 \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{x_k f_1}(m) \cdot h_{x_j f_1}(m+k) + \dots + \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{x_k f_N}(m) \cdot h_{x_j f_N}(m+k) \right] \quad (16)$$

Então, a partir de considerar umas entradas ao sistema LTI como processos randômicos tipo ruído branco podem ser levantadas duas questões. 1) A densidade espectral obtida unicamente da resposta do sistema permite determinar diretamente suas propriedades dinâmicas, devido ao fato de ser calculada como um produto entre as funções de transferência e uma constante (ver Equação (14)). 2) A transformada inversa de Fourier (Inverse Fast Fourier Transform-IFFT) da densidade espectral da resposta é igual às funções de correlação da resposta, as quais são proporcionais às funções de resposta impulsiva do sistema original (ver Equação (16)). Assim, as funções de correlação da resposta podem ser usadas como funções de resposta impulsiva no domínio do tempo para estimação de parâmetros modais. Uma demonstração similar do anterior pode ser encontrada em James, Carne et al., (1993).

2.2 RESPOSTA DE UM SISTEMA LTI-SDF

A resposta de um sistema LTI de um só grau de liberdade (Single Degree of Freedom-SDF) é descrito por uma equação dinâmica de segundo grau, considerando amortecimento viscoso proporcional à velocidade, da seguinte forma.

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)/m \text{ com } \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{c_c} \quad (17)$$

Em que, $x(t)$ é a resposta do sistema no tempo, $f(t)$ é a excitação, ω_0 é a frequência natural do sistema, k a constante de rigidez, m a massa do sistema, c a constante de amortecimento e ξ é a porcentagem de amortecimento com respeito ao

amortecimento crítico c_c . Então, aplicando a transformada de Laplace na Equação (17), com condições iniciais nulas e considerando a variável de Laplace como um número complexo $s = i\omega$, pode-se obter uma relação entre a entrada e saída ao sistema, assim.

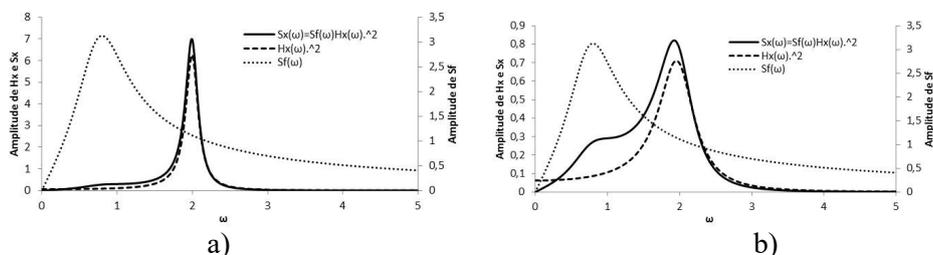
$$X(i\omega) = H_{xf}(i\omega)F(i\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega)}F(i\omega) \quad (18)$$

No caso de vibrações aleatórias, sendo $f(t)$ um processo randômico WSS, pode-se usar a Equação (11) para representar a densidade espectral de potência para um sistema SDF, como.

$$S_{xx}(i\omega) = H_{xf}^*(i\omega) \cdot H_{xf}(i\omega) \cdot S_{ff}(i\omega) = |H_{xf}(\omega)|^2 \cdot S_{ff}(i\omega) \frac{S_f(i\omega)}{m^2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega_0\omega)^2]} \quad (19)$$

Neste ponto, pode-se analisar na Equação (19) uma justificativa para estabelecer uma aproximação de $f(t)$ como um processo randômico Gaussiano tipo WGN de espectro plano em AMO, no entanto, existem algumas limitações. A razão é devida principalmente ao produto de $S_{ff}(\omega)$ e $|H_{xf}(\omega)|^2$. Nesse produto a parcela mais significativa da multiplicação chega a ser perto da frequência de ressonância com $\omega \approx \pm\omega_0$. Portanto, a precisão dessa aproximação depende principalmente da largura da banda da ressonância em $\omega \approx \pm\omega_0$, a qual é influenciada principalmente pela porcentagem de amortecimento ξ .

Na Figura 1 b mostra-se uma situação em que considerando $S_{ff}(\omega)$ constante como ruído branco, quando realmente existe uma excitação de tipo ruído colorido (com uma frequência definida de $\omega_{ff} = 0.8$ rad/s), não é adequada para uma porcentagem de amortecimento do sistema de $\xi = 0.15$. Porém, parece ser aceitável para uma porcentagem de $\xi = 0.05$ como mostrado na Figura 1.a. O ruído colorido estabelecido em $S_{ff}(\omega)$ foi modelado como um sistema de um grau de liberdade com um amortecimento de 0.4. Nesse sentido, é preciso estabelecer que uma aproximação do espectro da excitação como do ruído branco pode em algumas ocasiões conduzir a uma avaliação errônea das frequências naturais amortecidas e das porcentagens de amortecimento no espectro da saída. Igualmente, uma excitação com uma frequência bem definida geraria um pico de frequência no espectro da saída que realmente não faz parte do sistema analisado e que pode ser confundido como pertencentes a ele, como se mostra na Figura 1.c, na que foi modelado um espectro de entrada como um SDF com uma frequência de $\omega_{ff} = 0.8$ rad/s e amortecimento de 0.1.



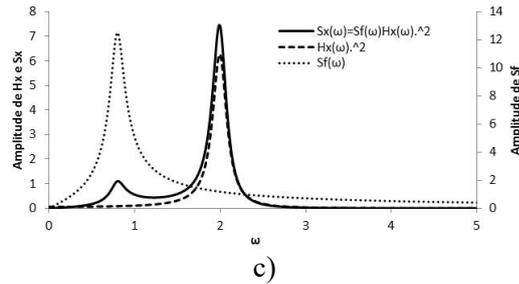


Figura 1 -- Densidade espectral da resposta a) $\omega_0 = 2, \xi = 0.05$, adequada aproximação com ruído branco, b) $\omega_0 = 2, \xi = 0.15$, inadequada aproximação com ruído branco, c) $\omega_0 = 2, \xi = 0.05$, inclusão da frequência de excitação no espectro da saída.

2.3 RESPOSTA DE UM SISTEMA LTI-MDF COM AMORTECIMENTO VISCOZO GERAL

No caso de sistemas de múltiplos graus de liberdade (Multiple Degree of Freedom-MDF), no qual existem múltiplas entradas ou fontes de excitação e múltiplas saídas ou respostas. Uma simples generalização da Equação (17) pode ser usada para representar o sistema MDF, como.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (20)$$

Na qual $[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, de dimensões $N \times N$, sendo N os graus de liberdade do sistema. Uma forma conveniente de representação da Equação (20) é a partir de uma representação em espaço de estado (State Space). Na formulação de espaço de estado transforma-se um sistema de N equações diferenciais de segundo ordem (Equação (20)) para um sistema de $2N$ equações diferenciais de primer ordem com a introdução de um vetor de estado $q(t)$, assim.

$$q(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Estabelecendo a seguinte relação.

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \{\dot{q}(t)\}_{2N \times 1} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \{q(t)\} = \begin{Bmatrix} F(t) \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

E simplificada da forma.

$$[A_s]\{\dot{q}(t)\} + [B_s]\{q(t)\} = \{W(t)\} \text{ com } \{W(t)\} = \begin{bmatrix} [B] \\ [0] \end{bmatrix} \{F(t)\} \quad (23)$$

O vetor de excitação $F(t)$ é modificado pela introdução de uma matriz B , constituídas por zeros e uns que especifica a localização das entradas. Para o caso da solução homogênea a Equação (23) representa um problema típico de valores e vetores próprios em que se pode avaliar $2N$ frequências naturais complexas e $2N$ vetores próprios complexos, os quais juntos satisfazem a equação.

$$[A_s]\{\Psi_j\}\lambda_j + [B_s]\{\Psi_j\} = 0 \text{ com } j = 1, 2, \dots, 2N \quad (24)$$

Em que, $\{\Psi_j\}$ é do tamanho $2N \times 1$ com $\{\Psi_{j=1:N}\}$ igual aos vetores próprios complexos e $\{\Psi_{j=N+1:2N}\}$ são os pares conjugadas, λ_j é um escalar com $\lambda_{j=1:N}$ igual aos valores próprios complexos e $\lambda_{j=N+1:2N}$ são seus pares conjugadas.

As matrizes $[A_s]$ e $[B_s]$ podem ser diagonalizadas, obtendo as seguintes relações.

$$\begin{aligned} [\Psi]^T [A_s] [\Psi] &= [\hat{a}_j] \\ [\Psi]^T [B_s] [\Psi] &= [\hat{b}_j] \end{aligned} \quad (25)$$

Substituindo as Equações (25) em (24) pode-se obter a seguinte relação modal.

$$\lambda_j = \hat{a}_j / \hat{b}_j \text{ com } j = 1, 2, \dots, 2N \quad (26)$$

Com

$$\lambda_j = -\xi_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \text{ se } \xi_j < 1 \quad (27)$$

Da Equação (27) pode-se extrair informação com respeito: à frequência amortecida, ω_{d_j} , não amortecida, ω_j , e a porcentagem de amortecimento, ξ_j , assim.

$$\omega_{d_j} = \text{imag}(\lambda_j), \omega_j = |\lambda_j|, \xi_j = -\text{real}(\lambda_j) / |\lambda_j| \quad (28)$$

A partir das propriedades de ortogonalidade das matrizes $[A_s]$ e $[B_s]$ pode-se determinar uma equação de modos não acoplados para a equação dinâmica em espaço de estado (Equação (23)), como segue.

$$\{\dot{z}(t)\}_j + \lambda_j \{z(t)\}_j = \frac{1}{a_j} \sum_{l=1}^{2N} \Psi_{lj} \{W_l(t)\} \text{ com } \{q(t)\} = [\Psi] \{z(t)\} \quad (29)$$

Aplicando a transformada de Laplace na Equação (29) e considerando a variável de Laplace como um número complexo $s = i\omega$, pode-se obter uma relação entre a entrada e a saída da resposta total para avaliar a função de transferência.

$$\{q_k(i\omega)\} = [\Psi]_{kl} [\hat{H}(i\omega)]_{q_k w_r} \{W_r(i\omega)\} = [H(i\omega)]_{q_k w_r} \{W_r(i\omega)\} = \sum_{l=1}^{2N} \frac{\Psi_{kl} \Psi_{rl} W_r(i\omega)}{a_l(i\omega - \lambda_l)} \quad (30)$$

No entanto, devido a que os valores e vectores próprios ocorrem em pares de complexos conjugados, pode-se reescrever (30), como (Ewins, 2000).

$$\{q_k(i\omega)\} = [H(i\omega)]_{q_k w_r} \{W_r(i\omega)\} = \sum_{l=1}^N \left(\frac{\Psi_{kl} \Psi_{rl} W_r(i\omega)}{a_l(i\omega - \lambda_l)} + \frac{\Psi_{kl}^* \Psi_{rl}^* W_r(i\omega)}{a_l^*(i\omega - \lambda_l^*)} \right) \quad (31)$$

Para vibrações aleatórias, em que $W(t)$ é um processo randômico WSS, representa-se a densidade espectral de potência para um sistema MDF com amortecimento viscoso geral, como.

$$[S(i\omega)]_{x_k x_j} = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \left(\sum_{l=1}^N \left(\frac{\Psi_{kl}^* \Psi_{rl}^*}{a_l^*(-i\omega - \lambda_l^*)} + \frac{\Psi_{kl} \Psi_{rl}}{a_l(-i\omega - \lambda_l)} \right) \sum_{l=1}^N \left(\frac{\Psi_{jl} \Psi_{sl}}{a_l(i\omega - \lambda_l)} + \frac{\Psi_{jl}^* \Psi_{sl}^*}{a_l^*(i\omega - \lambda_l^*)} \right) S_{f_r f_s}(i\omega) \right) \quad (32)$$

Estabelecidas as anteriores formulações para o caso de sistemas de múltiplos graus de liberdade, é necessário dizer no caso de análise modal experimental que se deve ter em conta as seguintes questões. Além de ter uma entrada com um conteúdo em frequência que esteja na faixa de frequências do interesse do sistema, essa mesma entrada deve estar adequadamente aplicada ou distribuída no sistema. Uma inadequada distribuição das forças de entrada pode conduzir em não excitar suficientemente alguns modos naturais, devido principalmente à existência de pontos com amplitudes zeros nos modos de vibração. Portanto, na análise modal operacional, outra suposição além de que as forças de entrada devem excitar as frequências naturais da estrutura, como pode ser uma excitação do tipo ruído branco, também é suposto que a entrada ao sistema é adequadamente distribuída.

Como exemplo do exposto usou-se a Equação (32) para avaliar a matriz de densidade espectral da resposta $[S(i\omega)]_{x_k x_j}$ a partir de estabelecer dois tipos de matriz de densidade espectral de entrada, $[S(i\omega)]_{f_r f_s}$, de ruído branco (densidade espectral constante) com uma distribuição diferente, uma com a excitação aplicada no segundo grau de liberdade e a outra no primeiro grau de liberdade. A resposta foi avaliada em

um sistema de três graus de liberdade, o qual tem para o segundo modo natural uma amplitude modal zero no segundo grau de liberdade. Assim, é mostrada na Figura 2a uma excitação aplicada no segundo grau de liberdade, a qual pode excitar só dois modos naturais do sistema pelo contrário, uma excitação aplicada no primeiro grau de liberdade pode excitar todos os modos naturais (Figura 2b).

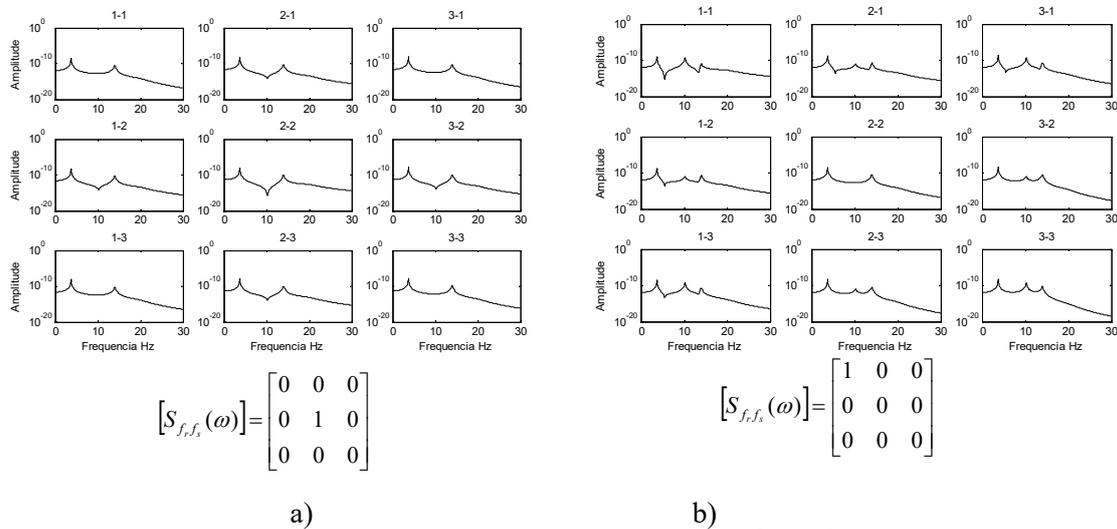


Figura 2 -- Matriz de densidade espectral de resposta $[S(i\omega)]_{x_k x_j}$ de um sistema de três graus de liberdade com uma distribuição de excitação de ruído branco aplicada a) no segundo grau de liberdade e b) no primer grau de liberdade.

2.4 TRANSMISSIBILIDADE E MODOS DE VIBRAÇÃO.

A transmissibilidade define-se como a relação de duas respostas espectrais, assumindo que existe uma força de entrada localizada no grau de liberdade k . Portanto, a transmissibilidade reduz-se à seguinte formulação.

$$T^k_{x_o x_j}(i\omega) = \frac{X_o(i\omega)}{X_j(i\omega)} = \frac{H_{x_o f_k}(i\omega)F_k(i\omega)}{H_{x_j f_k}(i\omega)F_k(i\omega)} = \frac{N_{ok}(i\omega)/D_{ok}(i\omega)}{N_{jk}(i\omega)/D_{jk}(i\omega)} = \frac{N_{ok}(i\omega)D_{jk}(i\omega)}{N_{jk}(i\omega)D_{ok}(i\omega)} \quad (33)$$

Em que, $N_{ok}(i\omega)$, $N_{jk}(i\omega)$ são os polinômios do numerador e $D_{jk}(i\omega)$, $D_{ok}(i\omega)$ são os polinômios do denominador nos modelos das funções de transferência $H_{ok}(i\omega) = \frac{N_{ok}(i\omega)}{D_{ok}(i\omega)}$ e $H_{jk}(i\omega) = \frac{N_{jk}(i\omega)}{D_{jk}(i\omega)}$. Pode-se notar que as raízes dos polinômios $D_{jk}(i\omega)$ e $D_{ok}(i\omega)$ da função de transferência contêm os pólos ou frequências naturais do sistema, os quais podem desaparecer por estabelecer uma relação de duas respostas. No entanto, os polinômios $D_{jk}(i\omega)$ e $D_{ok}(i\omega)$ podem conter diferentes quantidades de pólos e não todos desaparecem, pelo contrário estabelecem-se como zeros ou pólos da função de transmissibilidade.

Em suma, os polos da função de transmissibilidade serão iguais a: os zeros da função de transferência $H_{jk}(i\omega)$, as raízes do numerador $N_{jk}(i\omega)$ e aos polos que não desapareçam do denominador $D_{ok}(i\omega)$ ao fazer a relação com $D_{jk}(i\omega)$. Então, geralmente não todos os picos da função de transmissibilidade coincidem com as ressonâncias ou polos do sistema.

Então, fazendo uso do modelo da função de transferência para sistemas LTI-MDF com amortecimento viscoso geral (Equação (31)) pode-se representar a função de transmissibilidade da Equação 33, como.

$$T_{x_o x_j}^k(i\omega) = \frac{H_{x_o f_k}(i\omega)}{H_{x_j f_k}(i\omega)} = \frac{\sum_{l=1}^N \left(\frac{\Psi_{ol} \Psi_{kl}}{a_l(i\omega - \lambda_l)} + \frac{\Psi_{ol}^* \Psi_{kl}^*}{a_l^*(i\omega - \lambda_l^*)} \right)}{\sum_{l=1}^N \left(\frac{\Psi_{jl} \Psi_{kl}}{a_l(i\omega - \lambda_l)} + \frac{\Psi_{jl}^* \Psi_{kl}^*}{a_l^*(i\omega - \lambda_l^*)} \right)} \quad (34)$$

Uma importante propriedade da função de transmissibilidade é quando a variável $i\omega$ tende a um polo do sistema λ_r (Devriendt e Guillaume, 2008). Nesse limite é possível notar que converge em um valor de infinito sobre infinito, mas se é usado a regra de L'Hospital para o cálculo de limites desse tipo obtém-se a seguinte convergência .

$$\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_r} T_{x_o x_j}^k(i\omega) = \frac{\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_r} \left(\frac{\Psi_{ol} \Psi_{kl}}{a_l(i\omega - \lambda_r)^2} \right)}{\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_r} \left(\frac{\Psi_{jl} \Psi_{kl}}{a_l(i\omega - \lambda_r)^2} \right)} = \frac{\Psi_{or}}{\Psi_{jr}} \quad (35)$$

Pode-se observar que o limite na Equação (35) é independente da localização da entrada k é da força de excitação. Esse aspecto é de grande utilidade para a construção da configuração de um modo de vibração, r , a partir, do conhecimento de diferentes funções de transmissibilidade do sistema associadas a um ponto de referencia. Por exemplo, considere-se uma estrutura na qual foi feita uma medição simultânea em 5 pontos diferentes, com esses dados de resposta pode-se construir 5 funções de transmissibilidade com referencia ao ponto 1. Assim, aplicando a propriedade mostrada na Equação (35) pode-se encontrar a configuração do modo de vibração para uma frequência, r , como.

$$\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_r} [T_{11}^k(i\omega), T_{21}^k(i\omega), T_{31}^k(i\omega), T_{41}^k(i\omega), T_{51}^k(i\omega)]^T = \frac{1}{\Psi_{1r}} [\Psi_{1r}, \Psi_{2r}, \Psi_{3r}, \Psi_{4r}, \Psi_{5r}]^T \quad (36)$$

Para o caso de vibrações aleatórias a construção da função de transmissibilidade é determinada fazendo uso das Equações de densidade espectral (9) e (11), assim.

$$T_{x_o x_j}^k(i\omega) = \frac{H_{x_o f_k}(i\omega)}{H_{x_j f_k}(i\omega)} = \frac{S_{x_o x_k}(i\omega) / S_{f_k f_k}(i\omega)}{S_{x_j x_k}(i\omega) / S_{f_k f_k}(i\omega)} = \frac{S_{x_o x_k}(i\omega)}{S_{x_j x_k}(i\omega)} = \frac{\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N H_{x_o f_r}^*(i\omega) \cdot H_{x_k f_s}(i\omega) \cdot S_{f_r f_s}(i\omega)}{\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N H_{x_j f_r}^*(i\omega) \cdot H_{x_k f_s}(i\omega) \cdot S_{f_r f_s}(i\omega)} \quad (37)$$

O limite quando $i\omega$ tende a λ_r na função de transmissibilidade para vibrações aleatórias (Equação (37)) converge ao mesmo resultado do limite feito na Equação 35. Portanto, o uso de funções de transmissibilidade com densidades espectrais pode ser também utilizado para a construção de modos de vibração, da mesma forma como foi mostrado na Equação (36).

3. MÉTODOS NO DOMÍNIO DA FREQUENCIA PARA ANÁLISE MODAL OPERACIONAL.

Nos anos 90 foi proposto o uso da excitação natural para identificação de parâmetros modais (NExT) James, Carne et al. (1993). O método propõe que a função de correlação entre dois sinais de um sistema linear com modos normais e sujeita a uma entrada de ruído branco é da mesma forma que uma resposta impulsiva (FRI), aspecto exposto e demonstrado com a Equação 16. Dessa forma, em NExT define-se que a função de correlação pode ser expressada como um somatório de senos em decaimento (sinal transiente), na qual cada onda sinusoidal tem uma frequência amortecida, um fator de amortecimento e um coeficiente da forma modal que é idêntica ao correspondente modo estrutural. Portanto, um dos principais parâmetros a definir na identificação modal em AMO são as funções de correlação. Assim, três diferentes métodos para a obtenção das funções de correlação serão abordados.

3.1 FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO DE DADOS DE RESPOSTA

3.1.1 Método direto.

No item 2 foi introduzido o conceito de correlação entre sinais, no qual foi apresentada uma formulação para estimar a função de correlação (Equação (7)) para dados discretos finitos. Essa correlação pode-se representar em termos de densidade espectral ou seu periodograma no domínio da frequência a partir de aplicar a Transformada de Fourier, estabelecendo assim uma relação, como (Strum e Kirk, 1999).

$$F[\hat{R}_{x_k x_j}(k)] = \hat{S}_{x_k x_j}(i\omega) = \frac{1}{N} X_k(-i\omega) \cdot X_j(i\omega) = \frac{1}{N} X_k(i\omega)^* \cdot X_j(i\omega) \quad (38)$$

Então, a partir de usar a transformada inversa de Fourier na Equação (38) pode-se avaliar da mesma forma a função de correlação entre dois sinais.

$$\hat{R}_{x_k x_j}(k) = F^{-1} \left[\frac{1}{N} X_k(i\omega)^* \cdot X_j(i\omega) \right] \quad (39)$$

Assim, se é usado o algoritmo rápido para o cálculo da Transformada de Fourier (FFT) (Cooley e Tukey, 1965) o custo computacional de avaliar a Equação (39) será menor que o cálculo da somatória da Equação (7). No entanto, o estimador da função de correlação baseado no método direto ou cálculo direto do periodograma é um estimador enviesado da função de correlação, já que o valor esperado do estimador não é igual ao valor verdadeiro da função de correlação (Hayes, 1996).

$$E[\hat{R}_{x_k x_j}(k)] = \frac{N - |k|}{N} R_{x_k x_j}(k) = \varpi(k) R_{x_k x_j}(k) \quad (40)$$

Em que, $\varpi(k)$ é conhecida como a janela triangular de Barlett. O estimador também é considerado assintoticamente não enviesado para N quando tende a infinito, onde a relação $\frac{N - |k|}{N}$ tende a 1. Portanto, se N é finito um procedimento para eliminar o viés da função correlação é dividir a estimação da função de correlação por uma janela de Barlett do tamanho da função de correlação.

Por outro lado, o método direto é um estimador não consistente das funções de densidade espectral e **NÃO DEVE** ser usado para análises espectral, devido a que a variância do estimador não decresce a zero quando N tende ao infinito (Hayes, 1996).

$$Var[\hat{S}_{x_k x_j}(i\omega)] = S^2_{x_k x_j}(i\omega) \quad (41)$$

3.1.2 Método baseado no periodograma médio.

Uma alternativa ao cálculo da função de correlação é usar a média da densidade espectral da resposta, a partir de definir A amostras não sobrepostas de comprimento L nos sinais x_k e x_j , assim o número de dados total do sinal fica igual a N=AL. Desse modo, podem-se estabelecer q diferentes funções de correlação das mesmas sinais x_k e x_j variando entre 1 e A amostras, como.

$$\hat{R}_{x_k x_j}(k)_q = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1-k} x_k(n+qL) x_j(n+qL+k) \quad k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (42)$$

E diferentes densidades espectrais q aplicando a transformada de Fourier

$$F[\hat{R}_{x_k x_j}(k)_q] = \hat{S}_{x_k x_j}(i\omega)_q = \frac{1}{L} (X_k(i\omega)^* \cdot X_j(i\omega))_q \quad (43)$$

Avaliando a média aritmética das densidades espectrais q obtém-se um periodograma médio, assim.

$$\hat{S}_{x_k x_j}(i\omega) = \frac{1}{A} \sum_{q=1}^A \frac{1}{L} (X_k(i\omega)^* \cdot X_j(i\omega))_q \quad (44)$$

Uma estimativa da função de correlação pode ser obtida a partir de avaliar a transformada inversa de Fourier da Equação (44), como.

$$\hat{R}_{x_k x_j}(k) = F^{-1} \left[\frac{1}{A} \sum_{q=1}^A \frac{1}{L} (X_k(i\omega)^* \cdot X_j(i\omega))_q \right] \quad (45)$$

O estimador da função de correlação por meio do método do periodograma médio é também um estimador enviesado e assintoticamente não enviesado ao igual que o método direto, portanto suas estimações das funções de correlação devem ser também divididas por uma janela de Barlett para eliminar o viés da função de correlação. Porém, o periodograma médio é um estimador consistente das funções de densidade espectral, já que a variância da estimação da densidade espectral tende ao zero como A tende ao infinito (Hayes, 1996).

$$Var[\hat{S}_{x_k x_j}(i\omega)] \approx \frac{1}{A} S^2_{x_k x_j}(i\omega) \quad (46)$$

De fato, as funções de correlação podem ser estimadas a partir de qualquer estimação das funções de densidade espectrais usando a relação de Wiener-Khintchine, avaliadas através da transformada inversa de Fourier. De tal modo, que podem ser avaliadas usando outro tipo de estimadores das funções de densidade espectral como o periodograma modificado com aplicação de janelas na serie de dados e o periodograma médio modificado ou método de Welch (1967) que além de aplicar janelas, faz uma sobreposição dos dados para o calculo médio das densidades espectrais. O método de Welch será retomado posteriormente quando se abordem o método para avaliação da função de densidade espectral.

3.1.3 Método do decremento aleatório.

O método do decremento aleatório é uma técnica de processamento aproximado do sinal no domínio do tempo para a construção de um sinal característico, a partir da média de um conjunto de segmentos pré-selecionados do sinal. O sinal característico é comumente referido como de sinal RD. O sinal RD representa a vibração livre do sistema dinâmico sob assunção de uma excitação de ruído branco e determinadas condições iniciais (Asmussen, J. C., Ibrahim, S. e Brincker, R., 1998). Os princípios nos que se fundamenta o método do decremento aleatório são descritos como segue.

No item 2 foi exposto a resposta de um sistema dinâmico LTI como uma soma de convoluções para condições iniciais de deslocamento e velocidade iguais a zero Equação (2), mas uma resposta do sistema para a existência de condições iniciais pode ser representada, como (He *et al.*, 2011).

$$x_k(n) = \sum_{s=1}^N x_s(0) \cdot D_{x_k x_s(0)}(n) + \sum_{s=1}^N \dot{x}_s(0) \cdot V_{x_k \dot{x}_s(0)}(n) + \sum_{s=1}^N h_{x_k f_s}(n) \times f_s(n) \quad (47)$$

Em que, $D_{x_k x_s(0)}(n)$ é a resposta livre do sistema em k por uma condição inicial de deslocamento em s, $V_{x_k \dot{x}_s(0)}(n)$ é a resposta livre do sistema em k por uma condição de inicial de velocidade em s, $h_{x_k f_s}$ é a resposta impulsiva em k por uma força de impulso em s, $x_s(0)$ e $\dot{x}_s(0)$ são condições iniciais de deslocamento e velocidade, respectivamente.

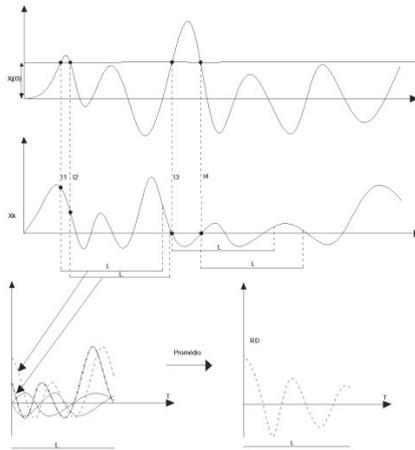


Figura 3 -- Seleção de segmentos, método do decremento aleatório.

Como se pode notar na Equação (47) a resposta dinâmica de um sistema $x(n)$ em qualquer tempo n é dada pela combinação de três contribuições: 1) a resposta degrau devido a uma condição inicial de deslocamento, 2) a resposta impulsiva causada pela condição inicial de velocidade e 3) e a resposta aleatória devido a uma excitação aleatória $f(n)$ aplicada no sistema.

Então, se é suposto que $f(n)$ é um ruído branco de origem gaussiano com média zero, então uma média de diferentes segmentos de resposta fara que a parte aleatória da resposta seja zero, $E[f(n)] = 0$. Para assegurar que a parte de resposta livre não seja zero, uma condição para a seleção dos segmentos deve ser aplicada no sinal. Por exemplo, como é mostrado na Figura 3, se é determinado um comprimento L do segmento e é selecionado um valor apropriado $x_j(0)$ no sinal j interceptará o sinal x_k em tempos denotados como $t_i (i = 1, 2, 3, \dots)$. Assim, se extraíram diferentes segmentos L no sinal k para ser promediado e obter a resposta livre do sistema.

Por outro lado, sob ação de $f(n)$ a resposta de $x(n)$ do sistema é também um processo gaussiano de média zero, portanto para uma condição de $x_j(0)$ fixa, a velocidade média dos segmentos será igual à zero $E[\dot{x}_s(0)] = 0$, igualmente as demais condições iniciais de deslocamento $x_s(0)$ diferente a $x_j(0)$ serão iguais à zero, $E[x_s(0)] = x_j(0)$. Desse modo, o valor esperado de $x(n)$ obtido fica igual a.

$$E[x_k(n)] = \sum_{s=1}^N E[x_s(0)] \cdot D_{x_k x_s(0)}(n) + \sum_{s=1}^N E[\dot{x}_s(0)] \cdot V_{x_k \dot{x}_s(0)}(n) + \sum_{s=1}^N h_{x_k f_s}(n) \times E[f_s(n)] \quad (48)$$

$$E[x_k(n)] = x_j(0) D_{x_k x_j(0)}(n)$$

Na Equação (48) mostra-se que o valor esperado do sinal $x_k(n)$ é uma resposta livre do sistema com deslocamento inicial $x_j(0)$ e velocidade inicial sendo zero. Então, no contexto pratico o número de amostras é limitado, portanto, é usada a média aritmética de diferentes segmentos como aproximação do valor esperado do sinal (Ibrahim, 2001). Assim, as funções RD podem ser computadas, como.

$$RD_{x_k x_j}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_k(t_i + L) \Big|_{T_{x_j}(t_i)} \quad (49)$$

Em que, N é o número de segmentos extraídos da resposta dinâmica x_k e $T_{x_j}(t_i)$ é a condição em x_j para extrair os segmentos. Além, da condição de uma passagem

de nível determinado em x_j outro tipo de condições podem ser estabelecidas, tais como: passagem de pontos positivos, passagem de zeros e extremos locais (Asmussen, 1997). Assim, as diferentes condições, podem ser.

$$T_{x_j}(t_i) = \{a_1 \leq x_j(t) \leq a_2, v_1 \leq \dot{x}_j(t) \leq v_2\} \quad \text{condição geral}$$

$$T_{x_j}(t_i) = \{x_j(t) = a_1, -\infty \leq \dot{x}_j(t) \leq \infty\} \quad \text{passagem de nível}$$

$$T_{x_j}(t_i) = \{a_1 \leq x_j(t) \leq a_2, -\infty \leq \dot{x}_j(t) \leq \infty\} \quad \text{passagem de pontos positivos} \quad (50)$$

$$T_{x_j}(t_i) = \{x_j(t) = 0, 0 \leq \dot{x}_j(t) \leq \infty\} \quad \text{passagem de zeros}$$

$$T_{x_j}(t_i) = \{0 \leq x_j(t) \leq \infty, \dot{x}_j(t) = 0\} \quad \text{extremos locais}$$

Devido a que nas aplicações praticas existem problemas tais como: o ruído no sinal e limitações no tempo de aquisição, umas das condições de promediado que produz melhores resultados na exatidão da avaliação das funções RD é a condição de passagem de pontos positivos, principalmente porque a quantidade de segmentos para o promediado é maior que nas outras condições (Asmussen, J., Ibrahim, S. e Brincker, R., 1998). Um exemplo, desse fato é o trabalho de Ye, Feng et al. (2012) no qual foi mostrado que para uma resposta total de 10seg com uso da condição de pontos positivos limitados entre um 1/3 e um 1/2 da máxima amplitude resulta uma diminuição notável do ruído para o cálculo da função RD de um comprimento de 2seg, comparado com o cálculo para uma condição de passagem de nível.

Se as respostas x_k e x_j são processos estacionários gaussianos de média zero e é aplicada a condição geral (Equação (50)) existe uma relação fundamental entre as funções RD e as funções de correlação e suas derivadas, dada como (Brincker *et al.*, 1992; Asmussen, J. C., Ibrahim, S. e Brincker, R., 1998).

$$RD_{x_k x_j}(t) = \frac{R_{x_k x_j}(t)}{\sigma_{x_k}^2} a - \frac{\dot{R}_{x_k x_j}(t)}{\sigma_{\dot{x}_k}^2} v \quad (51)$$

Em que, $\sigma_{x_k}^2$ é a covariância do processo x_k e os níveis a e v são determinados da função de densidade de x_k

$$a = \frac{\int_{a_1}^{a_2} x_k f_{x_k}(x) dx}{\int_{a_1}^{a_2} f_{x_k}(x) dx} \quad v = \frac{\int_{v_1}^{v_2} \dot{x}_k f_{\dot{x}_k}(x) d\dot{x}}{\int_{v_1}^{v_2} f_{\dot{x}_k}(x) d\dot{x}} \quad (52)$$

Finalmente, podem-se identificar três parâmetros importantes para a determinação das funções RD: o tipo de condição usada para a seleção dos segmentos $T_{x_j}(t_i)$, os níveis selecionados da respectiva condição a_1 , a_2 , v_1 , v_2 e a seleção do tamanho do segmento L.

3.2 FUNÇÕES DE DENSIDADE ESPECTRAL.

A determinação das funções de densidade espectral é a base para as metodologias no domínio da frequência, portanto nesta seção se apresentaram as metodologias tradicionalmente usadas como a transformada de Fourier para estimação de ditas funções a partir de series temporais. Entre os diferentes métodos não paramétricos para determinar as funções de densidade espectral o método mais usado

é o método de Welch, (1967) que envolve a determinação da transformada de Fourier dos sinais de resposta.

O método de Welch estabelece duas modificações ao método de periodograma médio ou método de Barlett: 1) permite que as amostras de realizações randômicas $x_k(n)$ e $x_j(n)$ sejam sobrepostas e 2) permite aplicar janelas $w(n)$ a cada amostra de dados.

No caso, quando é aplicada uma janela $w(n)$ ao processo randômico é chamado como de periodograma modificado e define-se, como.

$$\hat{R}_{x_k x_j}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} w(n)x_k(n)w(n)x_j(n+k) \quad k = 0,1,\dots, N-1 \quad (53)$$

Aplicando a transformada de Fourier na sequencia de correlação a seguinte densidade espectral é obtida.

$$F[\hat{R}_{x_k x_j}(k)] = \hat{S}_{x_k x_j}(i\omega) = \frac{1}{NU} Xu_k(i\omega)^* \cdot Xu_j(i\omega) \text{ com } U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2 \quad (54)$$

Em que, $Xu_k(i\omega)$ e $Xu_j(i\omega)$ são a transformada de Fourier de $w(n)x_k(n)$ e $w(n)x_j(n)$, respectivamente. Com o intuito de que não exista uma alteração da variância do processo randômico quando são aplicadas janelas temporais as ordenadas da transformada de Fourier devem ser divididas pelo valor quadrático médio da janela U.

Então, supondo que as amostras $x_k(n)$ e $x_j(n)$ estiveram deslocadas por D pontos e cada amostra tivera um comprimento L, então a q amostra vem dada por.

$$\hat{R}_{x_k x_j}(k)_q = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1-k} w(n)x_k(n+qD)w(n)x_j(n+qD+k) \quad k = 0,1,\dots, L-1 \quad (55)$$

Assim, a quantidade de pontos sobrepostos entre q e q+1 é L-D. Se houver A amostras ao longo da totalidade dos pontos N, então N fica como.

$$N = L + D(A-1) \quad (56)$$

Por exemplo, se L=D, então não existem sobreposição de pontos e A=N/L, ficando igual ao método de periodograma médio. Por outro lado, se as amostras estão sobrepostas um 50%, fica D=L/2 e A amostras, assim.

$$A = 2 \frac{N}{L} - 1 \quad (57)$$

Finalmente, avaliando uma média aritmética das densidades espectrais q sobrepostas e com a aplicação de janelas o periodograma pelo método de Welch estabelece-se, como.

$$\hat{S}_{x_k x_j}(i\omega) = \frac{1}{A} \sum_{q=1}^A \frac{1}{UL} (Xu_k(i\omega)^* \cdot Xu_j(i\omega))_q \quad (58)$$

Uma estimação das funções de correlação pode ser avaliada a partir de aplicar a transformada inversa de Fourier na Equação (58). O método de Welch é um estimador consistente das funções de densidade espectral devido a que sua variância tende a zero quando N tende ao infinito. Por exemplo, no caso de uma sobreposição de dados de 50% e a aplicação de uma janela de Barlett, a variância do estimador avalia-se, como (Hayes, 1996).

$$Var[\hat{S}_{x_k x_j}(i\omega)] \approx \frac{9L}{16N} S^2_{x_k x_j}(i\omega) \quad (59)$$

No aspecto, da aplicação de janelas o tipo janela comumente usada para sinais aleatórios é a janela tipo Hanning. A formulação da janela de Hanning é dada, como (Oppenheim e Schafe, 1989).

$$\varpi(n) = 0.5 \left(1 - \frac{\cos(2\pi n)}{N} \right), \quad 0 \leq n \leq N \quad (60)$$

$$L = N + 1$$

Em que, L é o comprimento total da janela. Nesse sentido, a aplicação de janelas no sinal aleatório tem uma grande utilidade para a redução do efeito de *leakage* ou distorção do espectro. O efeito de *leakage* é produto da existência de um número não inteiro de ciclos no sinal no interior do segmento; essa periodicidade é uma assunção importante do algoritmo da transformada de Fourier que é usado em cada um dos segmentos no método de Welch, portanto, uma aplicação de janelas no segmento tem como objetivo garantir que o sinal a submeter à Transformada de Fourier tem um período inteiro, tendo um valor de zero no início e no final do segmento.

O método de Welch é concebido para reduzir a variância do periodograma a partir de aplicar uma média do periodograma. Outro método não paramétrico para reduzir a variabilidade do periodograma é o método de suavização do periodograma ou método de Blackman e Tukey (1958). No método de Blackman e Tukey a variância do periodograma é reduzida a partir de aplicar uma janela à estimação da função de correlação $\hat{R}_{x_k x_j}(k)$ (Equação 7 ou Equação 39) com o objetivo de diminuir a contribuição de elementos não confiáveis da função de correlação. A razão deve-se que para valores grandes de k da função de correlação as estimações usam menos pontos na estimação e, portanto são menos confiáveis pelo que deveriam ter menor peso na estimação do periodograma. Especificamente, a densidade espectral pelo método de Blackman e Tukey é dada por.

$$\hat{S}_{x_k x_j}(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{x_k x_j}(k) \varpi(k) e^{-i\omega k} \quad (61)$$

Em que, $\varpi(k)$ é a janela aplicada na estimação da função de correlação. Assim o método de Blackman e Tukey é um estimador consistente da função de densidade espectral decrescendo a variância quando N tende ao infinito (Hayes, 1996).

$$\text{Var}[\hat{S}_{x_k x_j}(i\omega)] \approx S^2_{x_k x_j}(i\omega) \frac{1}{N} \sum_{k=-N}^N |\varpi(k)|^2 \quad (62)$$

Finalmente, foi mostrado que para uma excitação gaussiana com média zero as funções de decremento aleatório são proporcionais às funções de correlação (Equação (51)), portanto, podem ser usadas como estimadores das funções de correlação e das funções de densidade espectral a partir de aplicar a transformada de Fourier. Pode-se optar igualmente como na Equação (61) pela aplicação de uma janela temporal, como.

$$\hat{S}_{x_k x_j}(i\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R D_{x_k x_j}(k) \varpi(k) e^{-i\omega k} \quad (63)$$

3.3 MÉTODOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.

A base principal dos métodos no domínio da frequência encontra-se na definição da densidade espectral das respostas do sistema, assim diferentes alternativas com uso da transformada de Fourier foram expostas na secção anterior. Então, baseado na hipótese que a excitação é do tipo ruído branco, no item 2 pudesse estabelecer que o cálculo da densidade espectral só da resposta permite determinar diretamente as propriedades dinâmicas do sistema por sua proporcionalidade com a função de transferência (ver Equação (14)). De modo que as funções de densidade espectral apresentarão picos na amplitude que serão as frequências naturais de vibração

amortecidas, as quais para um amortecimento baixo são muito próximas às frequências naturais não amortecidas (ver Equação (28)).

Assim, serão apresentadas diversas metodologias de identificação modal no domínio da frequência analisando limitações e vantagens de metodologias tradicionais assim com também as mais recentes propostas.

3.3.1 Método de seleção de picos (PP).

O método básico no domínio da frequência é a seleção de picos ou Peak Pincking (PP) que é aplicado há algumas décadas na identificação modal de estruturas de engenharia civil (Felber, 1993). Esse método é o mais adequado para fazer uma primeira revisão na qualidade dos dados e obter uma primeira ideia das propriedades dinâmicas do sistema. A estimação das frequências do sistema é baseada na construção da média normalizada da densidade espectral de potência (Average Normalized Power Spectral Densities, ANPSDs), na qual se podem identificar as frequências naturais do sistema através da escolha dos picos de ressonância no ANPSDs. Geralmente, a média dos espectros é feito partir de somente os auto-espectros dos diferentes registros de sinais, através do procedimento seguinte.

$$ANPSD(i\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N NS_{x_k x_k}(i\omega) \quad (64)$$

Em que, N é o número de graus de liberdade medidos e $NS_{x_k x_k}(i\omega)$ são os espectros normalizados. O espectros normalizados são obtidos dividendo os auto-espectros pelas sumas de suas respectivas amplitudes, como.

$$NS_{x_k x_k}(i\omega) = \frac{S_{x_k x_k}(i\omega)}{\sum_{j=1}^L S_{x_k x_k}(i\omega_j)} \quad (65)$$

A normalização dos dados tem como objetivo garantir uma igualdade no conteúdo energético dos diferentes auto-espectros calculados da series de resposta medidas, devido a que essas medições são feitas em pontos diferentes da estrutura com amplitudes diferentes de resposta e possivelmente também em instantes de tempos diferentes.

As formas modais nesse método são avaliadas a partir do uso das funções das funções de transmissibilidade entre vários pontos de medições da estrutura com respeito a um ponto de referencia, da mesma forma como foi descrita no item 2 (Equação (36)). No entanto, as funções de transmissibilidade são calculadas a partir das densidades espectrais calculadas como na Equação (37), mas estabelecendo sempre um ponto de referencia *ref*, como.

$$T_{x_j x_{ref}}^{ref}(i\omega) = \frac{S_{x_j x_{ref}}(i\omega)}{S_{x_{ref} x_{ref}}(i\omega)} \quad (66)$$

Assim, exemplificando um sistema com 5 pontos pode-se construir 5 funções de transmissibilidade com referencia a $S_{x_{ref} x_{ref}}(i\omega)$, aplicando a propriedade mostrada na Equação (35) pode-se encontrar a configuração do modo de vibração para uma frequência, r com funções de densidade espectral, como

$$\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_r} [T_{11}^k(i\omega), T_{21}^k(i\omega), T_{31}^k(i\omega), T_{41}^k(i\omega), T_{51}^k(i\omega)]^T = \frac{1}{\Psi_{1r}} [\Psi_{1r}, \Psi_{2r}, \Psi_{3r}, \Psi_{4r}, \Psi_{5r}]^T \quad (67)$$

Desse modo, a partir da escolha da frequência de ressonância nas diferentes funções de transmissibilidade são avaliados os valores de amplitude e de fase. A fase é utilizada para estabelecer o sentido da amplitude do modo, um valor de fase 0° indica que j e *ref* estão no mesmo sentido, um valor de 180° em sentido oposto.

A identificação das porcentagens de amortecimento no método PP é baseada na consideração que as frequências naturais ou picos nas funções de densidades espectrais são condicionados pela contribuição de um só modo ressonante, portanto, as vizinhanças da frequência de ressonância podem ser simuladas através de um oscilador de um só grau de liberdade com uma frequência ω_l e uma porcentagem de amortecimento ξ_l . A anterior aproximação só pode ser válida quando as frequências associadas aos diferentes modos de vibração encontram-se bem separadas e suas porcentagens de amortecimento são baixas.

O fato anterior pode ser demonstrado pelo uso da Equação (30) que relaciona as saídas $\{X_k(i\omega)\}$ com as entradas $\{F_r(i\omega)\}$ a partir da Equação de contribuição modal, como.

$$\{q_k(i\omega)\} = [\Psi]_{kl} [\hat{H}(i\omega)]_{z_l f_r} \{W_r(i\omega)\}$$

Com

$$[\hat{H}(i\omega)]_{z_l f_r} = \frac{[\Psi]_{rl}}{a_l(i\omega - \lambda_l)} \quad (68)$$

Em que, $[\hat{H}(i\omega)]_{z_l f_r}$ é contribuição do modo z_l para uma entrada em r . Então, fazendo uma expansão da Equação (68) pode-se determinar que a resposta em termos de contribuição modal em um ponto k , vem dada por.

$$q_k(i\omega) = \Psi_{k1} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_1 f_r}(i\omega) W_r(i\omega) + \Psi_{k2} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_2 f_r}(i\omega) W_r(i\omega) + \dots + \Psi_{kN} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_N f_r}(i\omega) W_r(i\omega) \quad (69)$$

Sob assunção que os modos são bem separados e as porcentagens de amortecimentos são baixas, a resposta em k na ressonância é dominada pela contribuição do correspondente modo de vibração z_l e a contribuição dos outros modos podem ser desprezíveis, portanto, a resposta em k próximo à frequência de ressonância $i\omega_l$, pode-se avaliar aproximadamente, como.

$$q_k(i\omega_l) \cong \Psi_{kl} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_l f_r}(i\omega_l) W_r(i\omega_l) \quad (70)$$

Para a densidade espectral da resposta, caso de interesse, uma representação em termos de uma contribuição modal poder ser dada a partir de usar a Equação (69) e as equações de densidade espectral mostradas no item 2 (Equações (9) e (10)) estabelecendo as seguintes relações.

$$S_{x_k x_j}(i\omega) = \Psi_{k1}^* \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_1 f_r}^*(i\omega) S_{f_r x_j}(i\omega) + \Psi_{k2}^* \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_2 f_r}^*(i\omega) S_{f_r x_j}(i\omega) + \dots + \Psi_{kN}^* \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_N f_r}^*(i\omega) S_{f_r x_j}(i\omega) \quad (71)$$

$$S_{f_r x_j}(i\omega) = \Psi_{j1} \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_1 f_s}(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) + \Psi_{j2} \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_2 f_s}(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) + \dots + \Psi_{jN} \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_N f_s}(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) \quad (72)$$

Combinando as Equações (71) e (72) obtém-se uma representação da densidade espectral da resposta em termos de uma contribuição modal, assim.

$$S_{x_k x_j}(i\omega) = \Psi_{k1}^* \left[\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_1 f_r}^*(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_1 f_s}(i\omega) \Psi_{j1} + \dots + \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_1 f_r}^*(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_N f_s}(i\omega) \Psi_{jN} \right] + \Psi_{k2}^* \left[\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_2 f_r}^*(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_2 f_s}(i\omega) \Psi_{j1} + \dots + \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_2 f_r}^*(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_N f_s}(i\omega) \Psi_{jN} \right] + \dots + \Psi_{kN}^* \left[\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_N f_r}^*(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_1 f_s}(i\omega) \Psi_{j1} + \dots + \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_N f_r}^*(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_N f_s}(i\omega) \Psi_{jN} \right] \quad (73)$$

Uma representação compacta da Equação (73) é dada, como.

$$S_{x_k x_j}(i\omega) = \sum_{l_2=1}^N \sum_{l_1=1}^N \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \Psi_{x_k z_{l_1}} \hat{H}_{z_{l_1} f_r}^*(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{l_2} f_s}(i\omega) \Psi_{x_j z_{l_2}} \quad (74)$$

De igual forma, se os modos de vibração são bem separados e o amortecimento é baixo, a resposta $x_k x_j$ da densidade espectral próximo à frequência de ressonância $i\omega_l$, pode ser avaliada aproximadamente, como.

$$S_{x_k x_j}(i\omega_l) \cong \Psi_{kl}^* \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_l f_r}^*(i\omega_l) S_{f_r f_s}(i\omega_l) \hat{H}_{z_l f_s}(i\omega_l) \Psi_{jl} \quad (75)$$

Os termos $\hat{H}_{z_l f_r}^*(i\omega_l)$ e $\hat{H}_{z_l f_s}(i\omega_l)$ respondem a um modelo de um sistema de um só grau de liberdade, portanto, é possível extrair o amortecimento com técnicas clássicas para sistemas de um só grau de liberdade, tais como: O método de largura de meia banda de potência (Chopra, 2001) e o método de ajuste do espectro teórico de um só grau de liberdade (ver Equação (19)), (Brownjohn *et al.*, 1989).

A principal desvantagem do método PP é a dificuldade para identificar de forma confiável as frequências naturais do sistema por meio da seleção dos picos na média do espectro. Essa dificuldade deve-se principalmente à existência de modos próximos um do outro, que geralmente apresenta-se em estruturas cívicas. Além, o ruído intrínseco no sinal que se apresenta no espectro dificulta ainda mais essa seleção de frequências naturais próximas.

3.3.2 Método de decomposição do domínio da frequência (FDD).

As anteriores dificuldades expressadas no método básico de seleção de picos foram superadas com uma nova técnica conhecida como decomposição do domínio da frequência (FDD) divulgada por Brincker, Zhang *et al.*, (2000). A base deste método é a técnica matemática conhecida como decomposição de valores singulares (SVD), a qual é aplicada diretamente à matriz de PSD da resposta para cada frequência discreta $i\omega_j$.

$$[S(i\omega_j)]_{N \times N} = [U(i\omega_j)]_{N \times N} [\Sigma(i\omega_j)]_{N \times N} [V(i\omega_j)]_{N \times N}^H \quad (76)$$

Em que, N , é o número de graus de liberdade medidos, H , é a transposta conjugada, U e V são os vetores singulares de S , e Σ é uma matriz diagonal que contém os valores singulares de S , da forma $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N > 0$. A técnica SVD encontra-se relacionada com a determinação dos valores e vetores próprios das matrizes $S^H S$ e SS^H . Os valores singulares de S são iguais às raízes quadradas dos valores próprios u_j de $S^H S$ e SS^H . As colunas de U contêm os vetores próprios unitários de SS^H e as colunas de V os vetores próprios unitários $S^T S$. As matrizes $S^H S$ e SS^H são matrizes simétricas, portanto, os vetores próprios resultantes são ortogonais entre eles.

O uso da técnica SVD tem sido usado originalmente na área de controle robusto multivariável para avaliação do ganho de um sistema MIMO (Ringwood, 1995), no qual se faz uma decomposição em valores singulares da matriz de transferência. Portanto, aplicar essa técnica na matriz de densidade espectral terá como objetivo, igualmente, encontrar o máximo ganho do sistema, considerando que a matriz de densidade espectral seja proporcional a matriz de transferência. Essa proporcionalidade é válida quando o sistema é excitado por um ruído branco como é mostrado na Equação (14) e que se mostra aqui na forma matricial.

$$S_{x_k x_j}(i\omega) = \sigma^2 [H_{x_k f_r}(i\omega)]^* [I] \cdot [H_{x_j f_s}(i\omega)]^T \quad (77)$$

O ganho para um sistema MIMO vem dado pela seguinte relação.

$$G(i\omega) = \frac{\|X_k(i\omega)\|}{\|F_r(i\omega)\|} = \frac{\|H_{x_k f_r}(i\omega)\| \|F_r(i\omega)\|}{\|F_r(i\omega)\|} \quad (78)$$

Em que, $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana. Assim, supondo que a densidade espectral seja equivalente à função de transferência o ganho do sistema pode-se representar, como.

$$G(i\omega) = \frac{\|X_k(i\omega)\|}{\|F_r(i\omega)\|} = \frac{\|S_{x_k x_j}(i\omega)\{F_r(i\omega)\}\|}{\|F_r(i\omega)\|} \quad (79)$$

No caso, que $\{F_r(i)\}$ seja um vector unitário o ganho fica como.

$$G(i\omega) = \frac{\|S_{x_k x_j}(i\omega)\{F_r(i\omega)\}\|}{\|F_r(i\omega)\|=1} \quad (80)$$

Então, pode-se mostrar que a norma Euclidiana elevada ao quadrado de multiplicar $[S_{x_k x_j}(i\omega)]$ pela primeira coluna da matriz de vetores singulares, $V(i\omega)$, é igual ao máximo valor singular de $[S_{x_k x_j}(i\omega)]$.

$$\begin{aligned} \|[S_{x_k x_j}(i\omega)\{V(i\omega)\}_1]\|^2 &= ([S_{x_k x_j}(i\omega)\{V(i\omega)\}_1])^T ([S_{x_k x_j}(i\omega)\{V(i\omega)\}_1]) \\ &= \{V(i\omega)\}_1^T ([S_{x_k x_j}(i\omega)]^T [S_{x_k x_j}(i\omega)] \{V(i\omega)\}_1) \\ &= \{V(i\omega)\}_1^T u_1(i\omega) \{V(i\omega)\}_1 \\ \|[S_{x_k x_j}(i\omega)\{V(i\omega)\}_1]\| &= \sqrt{u_1(i\omega)} = \Sigma(i\omega)_{11} = \sigma_1(i\omega) \end{aligned} \quad (81)$$

Na anterior equação foram consideradas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} [S_{x_k x_j}(i\omega)]^T [S_{x_k x_j}(i\omega)] \{V(i\omega)\}_1 &= u_1(i\omega) \{V(i\omega)\}_1 \\ \{V(i\omega)\}_1^T \{V(i\omega)\}_1 &= 1 \end{aligned} \quad (82)$$

Uma maneira intuitiva de entender o anterior resultado é notando que σ_1 é o máximo ganho sobre um conjunto ortogonal de direções da entrada definido pelos vetores singulares à direita, $V(i\omega)$. Assim, o ganho máximo pode ser obtido quando o vector de entrada unitário, $\{F_r(i\omega)\}$, é proporcional ou paralelo, $\{V(i\omega)_1\}$. Por outro lado, pode se notar na parte direita da Equação (29) de resposta modal, igual a, $\{\Psi\}_j^T \{W_r(t)\}$, que a máxima força de entrada para um vector unitário $W_r(t)$ é dada quando a entrada é paralela ao modo de vibração, portanto, pode-se concluir que os vetores singulares à direita, $\{V(i\omega)_1\}$, na ressonância serão proporcionais aos vetores modais, para alcançar o máximo ganho.

Dessa forma, na técnica FDD as frequências naturais podem ser avaliadas dos picos do gráfico de valores singulares, $\sigma_1(i\omega)$, ou máximos ganhos e as correspondentes formas modais podem ser obtidas dos vetores singulares, $\{V(i\omega)_1\}$, em cada frequência ressonância, $i\omega_l$.

3.3.3 Método melhorado do FDD (EFDD)

A primeira geração de FDD pode só estimar frequências naturais e formas modais. A segunda geração conhecida como melhora do FDD ou EFDD proposta por Brincker, Ventura et al., (2001), pode estabelecer também as porcentagens de amortecimento, através de aplicar uma IFFT aos valores singulares vizinhos da frequência natural, a qual é uma aproximação da função de correlação de um sistema SDF. Esta aproximação também considera o fato que foi demonstrado no método PP na qual as vizinhanças da frequência de ressonância podem ser modeladas como de um

oscilador de um só grau de liberdade. No entanto, o tamanho dessa vizinhança é definido através de aplicar o critério de segurança modal (MAC) entre o vetor singular $\{V(i\omega)_1\}$ da frequência natural, $i\omega_1$, e os vetores singulares, j , vizinhos. O critério de segurança modal pode assumir um valor entre 0 e 1, na que um valor de 1 significa que os vetores são paralelos e 0 que são ortogonais, assim é possível determinar um limite mínimo para o valor do MAC é escolher a vizinhança dentro desse valor. O MAC é determinado a partir da seguinte relação.

$$MAC = \frac{\{V(i\omega_l)\}^T \{V(i\omega_j)\}}{\left(\{V(i\omega_l)\}^T \{V(i\omega_l)\}\right)\left(\{V(i\omega_j)\}^T \{V(i\omega_j)\}\right)} \quad (83)$$

Depois de aplicar a IFFT aos valores singulares escolhidos dentro da vizinhança da frequência de ressonância $i\omega_l$ obtém-se uma função de correlação que corresponde à resposta transiente de um sistema SDF, na qual pode ser calculada a porcentagem de amortecimento pelo uso da técnica do decremento logarítmico (Chopra, 2001).

No método EFDD a estimação das formas modais também é melhorada considerando todos os vectores singulares dentro da vizinhança de cada frequência de ressonância, $i\omega_l$, ponderados pelo correspondente valor singular.

Finalmente, uma importante característica do método EFDD é que a partir do uso do indicador MAC, é possível identificar frequências de ressonância do sistema que estejam muito próximas sempre e quando elas sejam ortogonais.

3.3.4 Métodos RD-FDD e RD-EFDD.

Como já foi comentada na seção de estimação de funções de densidade espectral uma possível aproximação das funções de densidades espectral é aplicando a transformada de Fourier diretamente às funções RD (ver Equação (63)). Dessa forma, com o calculo da densidade espectral por meio das funções RD podem ser aplicadas as técnicas FDD ou EFDD, surgindo desta maneira os métodos RD-FDD ou RD-EFDD, como foi proposto por Rodrigues e Brincker, (2005).

3.3.5 Método decomposição do domínio da frequência-espço (FSDD)

Uma terceira geração do método FDD é a decomposição do domínio da frequência-espço (FSDD) desenvolvido por Zhang, Wang et al., (2010). O método faz uso da decomposição da matriz espectral pela via de valores singulares, ao igual que faz o método FDD. No entanto, o método anterior EFDD avalia o amortecimento a partir de aplicar o método decremento logarítmico à função de correlação avaliada pela aplicação da IFFT aos valores singulares vizinhos da frequência de ressonância. Nesse aspecto, o cálculo da IFFT com um espectro truncado pode causar erros na estimação do amortecimento, principalmente quando existem frequências naturais muitos próximas.

Desse modo, o método FSDD foi desenvolvido para eliminar o anterior tipo de problema do método EFDD. O método FSDD faz uma transformação linear da matriz espectral, pre-multiplicando e pos-multiplicando o vector singular correspondente a uma frequência de ressonância, $i\omega_l$. Assim, fazendo uso das propriedades de ortogonalidade entre os modos de vibração a nova matriz espectral obtida terá um comportamento de um SDF.

A anterior propriedade da matriz de densidade espectral pode ser demonstrada partir de usar a Equação (74) na forma matricial e pre-multiplicando e pos-multiplicando

por um vector singular $\{V(i\omega)_1\}$ da frequência de ressonância $i\omega_l$ que igual ao modo de vibração $\{\Psi_l\}$, assim.

$$S_{xx}(i\omega) = \{\Psi_l\}_{N \times 1}^T [\Psi_j]_{N \times N} [\hat{H}^*(i\omega)]_{N \times N} [S_{ff}(i\omega)]_{N \times N} [\hat{H}(i\omega)]_{N \times N}^T [\Psi_j]_{N \times N}^T \{\Psi_l\}_{N \times 1} \\ = \{\delta_{l,j}\}_{N \times 1}^T [\hat{H}^*(i\omega)]_{N \times N} [S_{ff}(i\omega)]_{N \times N} [\hat{H}(i\omega)]_{N \times N}^T \{\delta_{l,j}\}_{N \times 1} \quad \text{com} \quad \delta_{l,j} = \begin{cases} 1 & l = j \\ 0 & l \neq j \end{cases} \quad (84)$$

O $\delta_{l,j}$ estabelece a propriedade de ortogonalidade dos modos de vibração, em que $\{\Psi_l\}^T \{\Psi_j\} = 1$ se $l = j$ e $\{\Psi_l\}^T \{\Psi_j\} = 0$ se $l \neq j$. Uma representação em termos de uma somatória poder dada, como.

$$S_{x_k x_j}(i\omega) = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_l f_r}^*(i\omega) S_{f_r f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_l f_s}(i\omega) \quad (85)$$

Em que, os termos $\hat{H}_{z_l f_r}^*(i\omega_l)$ e $\hat{H}_{z_l f_s}(i\omega_l)$ respondem a um modelo de um sistema de um só grau de liberdade na frequência de ressonância $i\omega_l$. Pode-se notar que o vector singular correspondente a uma frequência de ressonância $i\omega_l$ atua nesse método como um filtro modal da matriz espectral. Então, a nova matriz espectral filtrada pode ser aplicada a IFFT para avaliar a função de correlação e avaliar a porcentagem de amortecimento modal, sem a necessidade do truncamento do espectro.

3.3.6 Método baseado em transmissibilidade.

Os diferentes métodos descritos anteriormente fazem uso da assunção de uma excitação de ruído branco. Com respeito, a essa assunção surge uma aproximação para identificar parâmetros modais em AMO, baseado no conceito de transmissibilidade por Devriendt e Guillaume (2007). Nessa proposta para análise modal baseada no conceito de transmissibilidade não se precisa que a força de excitação seja considerada como ruído branco. A força pode ser arbitraria como ruído colorido, barrido de senos ou impacto, etc, sempre que seja garantido que estas forças consigam excitar as frequências do sistema. Por outro lado, geralmente os polos que são identificados das medições de transmissibilidade não correspondem com os polos do sistema, porém, fazendo uma combinação de medições de transmissibilidade baixo diferentes condições de carregamento é possível identificar parâmetros modais (Devriendt e Guillaume, 2008).

No item 2 foi demonstrado que o limite da função de transmissibilidade quando $i\omega$ tende para um polo do sistema, λ_l , converge à seguinte relação.

$$\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} T_{x_o x_j}^k(i\omega) = \lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} \frac{X_o(i\omega)}{X_j(i\omega)} = \lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} \frac{H_{x_o f_k}(i\omega) F_k(i\omega)}{H_{x_j f_k}(i\omega) F_k(i\omega)} = \frac{\Psi_{ol}}{\Psi_{jl}} \quad (86)$$

Em que, Ψ_{ol} e Ψ_{jl} são as componentes modais do modo l nos graus de liberdade o e j , respectivamente. Assim, pode-se notar que o limite da transmissibilidade quando tende para um polo λ_l é independente da localização da excitação, k , é da característica da excitação. Consequentemente, estabelecer uma subtração de duas funções de transmissibilidade com os mesmos graus de liberdade de saída, mas com diferentes entradas k e z , resultam.

$$\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} (T_{x_o x_j}^k(i\omega) - T_{x_o x_j}^z(i\omega)) = \frac{\Psi_{ol}}{\Psi_{jl}} - \frac{\Psi_{ol}}{\Psi_{jl}} = 0 \quad (87)$$

Isto significa que os polos, λ_l , do sistema são zeros na função racional, $\Delta T_{x_o x_j}^{kz}(i\omega) = (T_{x_o x_j}^k(i\omega) - T_{x_o x_j}^z(i\omega))$, e, portanto serão polos na inversa.

$$\Delta^{-1}T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega) = \frac{1}{\Delta T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega)} = \frac{1}{(T^k_{x_o x_j}(i\omega) - T^z_{x_o x_j}(i\omega))} \quad (88)$$

Note que a função inversa $\Delta^{-1}T^{kz}_{x_o x_j}$ pode ser reescrita em termos de numeradores e denominadores das funções de transferência, como.

$$\Delta^{-1}T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega) = \frac{1}{\Delta T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega)} = \frac{1}{\left(\frac{H_{x_o f_k}(i\omega)}{H_{x_j f_k}(i\omega)} - \frac{H_{x_o f_z}(i\omega)}{H_{x_j f_z}(i\omega)} \right)} \quad (89)$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{N_{ok}(i\omega)D_{jk}(i\omega)}{N_{jk}(i\omega)D_{ok}(i\omega)} - \frac{N_{oz}(i\omega)D_{jz}(i\omega)}{N_{jz}(i\omega)D_{oz}(i\omega)} \right)}$$

$$= \frac{N_{jk}(i\omega)D_{ok}(i\omega)N_{jz}(i\omega)D_{oz}(i\omega)}{N_{ok}(i\omega)D_{jk}(i\omega)N_{jz}(i\omega)D_{oz}(i\omega) - N_{jk}(i\omega)D_{ok}(i\omega)N_{oz}(i\omega)D_{jz}(i\omega)}$$

Assim, é notável que os polos da função racional, podem exceder os polos do sistema, devido aos zeros N_{ok} , N_{jz} , N_{jk} , N_{oz} conteúdos no denominador. Portanto, em geral, só um subconjunto dos polos de $\Delta T^{kz}_{x_o x_j}$ corresponderam aos polos reais do sistema.

Para o anterior problema em Devriendt e Guillaume (2008) foi dada uma solução numérica que consiste em estabelecer uma matriz quadrada de seis medições de transmissibilidade para três combinações de carga diferentes, \mathbf{k} , \mathbf{z} , e \mathbf{v} usando três graus de liberdade, \mathbf{o} , \mathbf{j} , e \mathbf{h} , assim.

$$T(i\omega) = \begin{bmatrix} T^k_{x_o x_j}(i\omega) & T^z_{x_o x_j}(i\omega) & T^v_{x_o x_j}(i\omega) \\ T^k_{x_h x_j}(i\omega) & T^z_{x_h x_j}(i\omega) & T^v_{x_h x_j}(i\omega) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (90)$$

Então, considerando o fato que as funções de transmissibilidade convergem ao mesmo valor quando estão nos polos do sistema, todas as colunas da matriz $T(i\omega)$ serão linearmente dependentes. Portanto, o posto da matriz será igual a 1 nos polos do sistema. Uma técnica para avaliar o posto da matriz é a avaliação dos valores singulares da matriz, a quantidade de valores singulares da matriz diferentes de zero é igual ao posto. O anterior significa que o segundo valor singular, σ_2 , converge para zero em $i\omega = \lambda_l$. Assim, os picos do gráfico da inversa dos segundos valores singulares $1/\sigma_2(i\omega)$ coincidem com as frequências de ressonância.

A aproximação descrita anteriormente considera só uma entrada ao sistema em cada uma das funções de transmissibilidade. Porém, na maioria das aplicações existe uma situação de múltiplas entradas. Nessa situação, a partir do uso da Equação (69) a transmissibilidade representa-se, como.

$$T^F_{x_o x_j}(i\omega) = \frac{X_o(i\omega)}{X_j(i\omega)} = \frac{\Psi_{o1} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_1 f_r}(i\omega) W_r(i\omega) + \Psi_{o2} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_2 f_r}(i\omega) W_r(i\omega) + \dots + \Psi_{oN} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_N f_r}(i\omega) W_r(i\omega)}{\Psi_{j1} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_1 f_r}(i\omega) W_r(i\omega) + \Psi_{j2} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_2 f_r}(i\omega) W_r(i\omega) + \dots + \Psi_{jN} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_N f_r}(i\omega) W_r(i\omega)} \quad (91)$$

O limite da função de transmissibilidade para múltiplas entradas quando $i\omega$ tende para um polo do sistema λ_l é o mesmo valor como para uma só entrada, dada por.

$$\begin{aligned}
\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} T^{F_r}_{x_o x_j}(i\omega) &= \lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} \frac{\Psi_{o1} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_1 f_r}(i\omega) W_r(i\omega) + \Psi_{o2} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_2 f_r}(i\omega) W_r(i\omega) + \dots + \Psi_{oN} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_N f_r}(i\omega) W_r(i\omega)}{\Psi_{j1} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_1 f_r}(i\omega) W_r(i\omega) + \Psi_{j2} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_2 f_r}(i\omega) W_r(i\omega) + \dots + \Psi_{jN} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_N f_r}(i\omega) W_r(i\omega)} \\
&= \frac{\Psi_{o1} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_1 f_r}(i\omega) W_r(i\omega)}{\Psi_{j1} \sum_{r=1}^N \hat{H}_{z_1 f_r}(i\omega) W_r(i\omega)} \\
&= \frac{\Psi_{o1}}{\Psi_{j1}}
\end{aligned} \tag{92}$$

O anterior conclui que o procedimento é ainda aplicável para múltiplas entradas, W_r , ao sistema.

Outra aproximação similar para análise modal com uso de transmissibilidade é dada em Devriendt, De Sitter et al. (2010), na qual relaciona-se as transmissibilidade multivariável, (Riberio, Silva e Maia, 2000), que não cumprem com a propriedade expressada na Equação (87), com umas funções chamadas como “seudo-funções de transmissibilidade escalar”. Estas “seudo-funções de transmissibilidade escalar” cumprem com a propriedade da Equação (87), portanto, podem-se extrair parâmetros modais a partir da função racional (Equação (88)). No entanto, estas “seudo-funções de transmissibilidade escalar” também são calculadas a partir de três condições de carga diferentes.

3.3.7 Método baseado em transmissibilidade com densidade espectral.

Uma limitação das anteriores metodologias baseada em transmissibilidade é que devem ser obtidas durante a experimentação diferentes condições de carga, as quais podem ser difíceis de obter em grandes estruturas até mesmo com o uso de excitação artificial em combinação com vibração do ambiente (vento, tráfego, sismo, etc).

Uma solução alternativa devido a anterior dificuldade foi apresentada em Yan e Ren (2012) mediante o uso transmissibilidade com densidade espectral de potência (PSDT). Nesta aproximação é possível obter os parâmetros modais do sistema por meio da combinação de diferentes PSDT com diferentes referências de saída para uma só condição de carga.

A função de transmissibilidade com o uso de funções de densidade espectral foi definida no item 2 na Equação (37), como.

$$T^{k}_{x_o x_j}(i\omega) = \frac{S_{x_o x_k}(i\omega)}{S_{x_j x_k}(i\omega)} = \frac{\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N H^*_{x_o f_r}(i\omega) \cdot H_{x_k f_s}(i\omega) \cdot S_{f_r f_s}(i\omega)}{\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N H^*_{x_j f_r}(i\omega) \cdot H_{x_k f_s}(i\omega) \cdot S_{f_r f_s}(i\omega)} \tag{93}$$

Em que, $T^{k}_{x_o x_j}(i\omega)$ define uma relação das saídas x_o e x_j com referencia à saída x_k . Como tem sido provado anteriormente para a transmissibilidade, na transmissibilidade com densidade espectral o limite quando $i\omega$ tende para um polo λ_l converge ao mesmo valor que na transmissibilidade. Isso pode ser provado a partir de usar a Equação (73), como.

$$\begin{aligned}
\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} T^k_{x_o x_j}(i\omega) &= \lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} \frac{S_{x_o x_k}(i\omega)}{S_{x_j x_k}(i\omega)} \\
&= \lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} \frac{\left[\Psi^*_{o1} \left[\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{f_s}}(i\omega) \Psi_{k1} + \dots + \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{n_f}}(i\omega) \Psi_{kN} \right] + \right. \\
&\quad \Psi^*_{o2} \left[\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{f_s}}(i\omega) \Psi_{k1} + \dots + \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{n_f}}(i\omega) \Psi_{jN} \right] + \dots \\
&\quad \left. + \Psi^*_{oN} \left[\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{f_s}}(i\omega) \Psi_{k1} + \dots + \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{n_f}}(i\omega) \Psi_{kN} \right] \right] \\
&= \lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} \frac{\left[\Psi^*_{j1} \left[\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{f_s}}(i\omega) \Psi_{k1} + \dots + \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{n_f}}(i\omega) \Psi_{kN} \right] + \right. \\
&\quad \Psi^*_{j2} \left[\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{f_s}}(i\omega) \Psi_{k1} + \dots + \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{n_f}}(i\omega) \Psi_{kN} \right] + \dots \\
&\quad \left. + \Psi^*_{jN} \left[\sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{f_s}}(i\omega) \Psi_{k1} + \dots + \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{n_f}}(i\omega) \Psi_{kN} \right] \right] \\
&= \frac{\Psi^*_{ol} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{f_s}}(i\omega) \Psi_{kl}}{\Psi^*_{jl} \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \hat{H}_{z_{f_s}}^*(i\omega) S_{f_s f_s}(i\omega) \hat{H}_{z_{f_s}}(i\omega) \Psi_{kl}} \\
&= \frac{\Psi^*_{ol}}{\Psi^*_{jl}}
\end{aligned} \tag{94}$$

Logo, as PSDTs são independentes da posição e características da excitação quando $i\omega = \lambda_l$. Do mesmo modo, pode-se estabelecer uma PSDTs com uma referencia z, diferente, na qual se tende ao mesmo valor quando $i\omega = \lambda_l$.

$$\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} T^z_{x_o x_j}(i\omega) = \lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} \frac{S_{x_o x_z}(i\omega)}{S_{x_j x_z}(i\omega)} = \frac{\Psi^*_{ol}}{\Psi^*_{jl}} \tag{95}$$

Então, estabelecer uma subtração de duas PSDTs com os mesmos graus de liberdade de relação, mas como uma referencia de saída diferente, resulta em.

$$\lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} \Delta T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega) = \lim_{i\omega \rightarrow \lambda_l} (T^k_{x_o x_j}(i\omega) - T^z_{x_o x_j}(i\omega)) = \frac{\Psi^*_{ol}}{\Psi^*_{jl}} - \frac{\Psi^*_{ol}}{\Psi^*_{jl}} = 0 \tag{96}$$

Isto mostra que os polos do sistema são zeros na função racional $\Delta T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega)$ (TSF), os quais serão polos na função inversa, $\Delta^{-1} T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega)$ (ITSF). Assim, as frequências naturais do sistema podem ser determinadas por uma simples observação dos picos das funções ITSF. Em Yan e Ren (2012) é adoptado uma média normalizado das ITSF (ANITSF) para identificação das frequências naturais. Assim, como as ANPSDs do método PP, as ANITSF são definidas como uma média das normalizadas ITSFs, $N\Delta^{-1} T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega)$, como.

$$ANITSF(i\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N N\Delta^{-1} T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega) \tag{97}$$

Em que, N é numero de $N\Delta^{-1} T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega)$ escolhidas. As ITSFs normalizadas são obtidas, dividendo as ITSFs pelas sumas de suas respectivas amplitudes, como.

$$N\Delta^{-1} T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega) = \frac{\Delta^{-1} T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega)}{\sum_{j=1}^L \Delta^{-1} T^{kz}_{x_o x_j}(i\omega)} \tag{98}$$

Os modos de vibração nesta metodologia são avaliados da mesma forma como foi descrita no método PP.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As diferentes metodologias tratadas nesta revisão têm como base na análise de sinais o uso da transformada de Fourier para passar ao domínio da frequência. Porém, outros tipos de transformadas também são objeto de estudo no âmbito da análise modal operacional, tais como a transformada Wavelet e Hilbert, que não foram tratados nesta

revisão. As transformadas de Wavelet e Hilbert são efetivas para a análise de sinais não estacionárias devido a que fornecem informação das frequências com uma localização no tempo, em conjunto com a informação de energia e de frequência. O uso desse tipo de transformadas também é adequado para a análise de sistemas não lineais (Uhl e Klepka, 2005) ,(Han, Li e Li, 2007).

No entanto, as diferentes técnicas ou métodos descritos nesta revisão para avaliar parâmetros modais podem ser combinados com o uso das transformadas Wavelet e de Hilbert, como são: Estimação de funções de correlação, o método do decremento aleatório, a técnica SVD, a transformação linear do espectro (FSDD), e os métodos que usam transmissibilidade. Exemplos, desses tipos de combinações são abordados em estudos como em Lardies, Ta et al. (2004), que combina o método do decremento aleatório, com a análise da transformada de Wavelet. O primeiro método para avaliar a resposta livre do sistema é o segundo para passar ao domínio da frequência e extrair os parâmetros modais. Em Le e Paultre (2013) usam a transformada de Wavelet com dados de funções de correlação e fazem uma decomposição em valores singulares, os valores singulares são utilizados para avaliar frequências e amortecimentos e os vetores singulares para avaliar formas de vibração, da mesma forma como foi descrita no método FDD, mas esses parâmetros são estimados ao longo do tempo possibilidade que oferece a transformada de Wavelet. E em Yan e Ren (2013) e usado o conceito de transmissibilidade entres espectros de resposta para avaliar parâmetros modais, conceito descrito nesta revisão, mas em combinação com o uso da transformada de Wavelet para avaliar a resposta espectral.

Na aplicação da transformada de Wavelet um das variáveis mais importantes para o correto uso dessa técnica refere-se à escolha correta da função Wavelet mãe que controla a resolução em tempo e frequência da análise. Uma das Wavelet mãe mais conhecidas e aplicadas são as funções de Morlet e Morlet modificada, porém, estas funções contém uma serie de parâmetros que devem ser adequadamente estabelecidos. Diferentes trabalhos como, Hoa, Tamura et al. (2010), Le e Tamura (2009) e Hamtaei e Anvar (2008) estudam aproximações diferentes dessas funções com intuito de melhorar a resolução em frequência e tempo, e dessa forma melhorar a determinação dos parâmetros modais, para o caso específico de análise modal operacional.

Para o caso da transformada de Hilbert, ela é baseada na chamada técnica empírica mode decomposition (EMD) (Huang *et al.*, 1998). Nessa técnica estabelece-se uma decomposição do sinal em uma series de dados intrínsecos quase estacionários chamados como intrinsic mode functions IMFs, através de um processo conhecido como sifting process. As frequências contidas em cada IMFs só dependem do sinal original e podem ser consideradas como uma classe de função de resposta modal. Desta forma aplicando o EMD, têm-se trabalhos como em Yu e Ren (2005) e Han, Li et al (2007), o qual adoptada o uso do EMD como ferramenta de pré-processamento do sinal fazer uma decomposição da resposta e aplicar uma técnica de identificação modal. Também em He, Hua et al. (2011) foi combinado o método EMD com o método do decremento aleatório. Em que primeiro foi avaliadas as funções IMFs para logo processar os dados pelo decremento aleatório e obter as funções de livre decaimento. As funções de livre decaimento são expressas analiticamente em termos de parâmetros modais e um problema de optimização é resolvido para obter os parâmetros modais de cada função.

Finalmente, na Figura 4 apresenta-se um esquema em que se sistematizam os principais métodos de identificação para análise modal operacional no domínio da frequência.

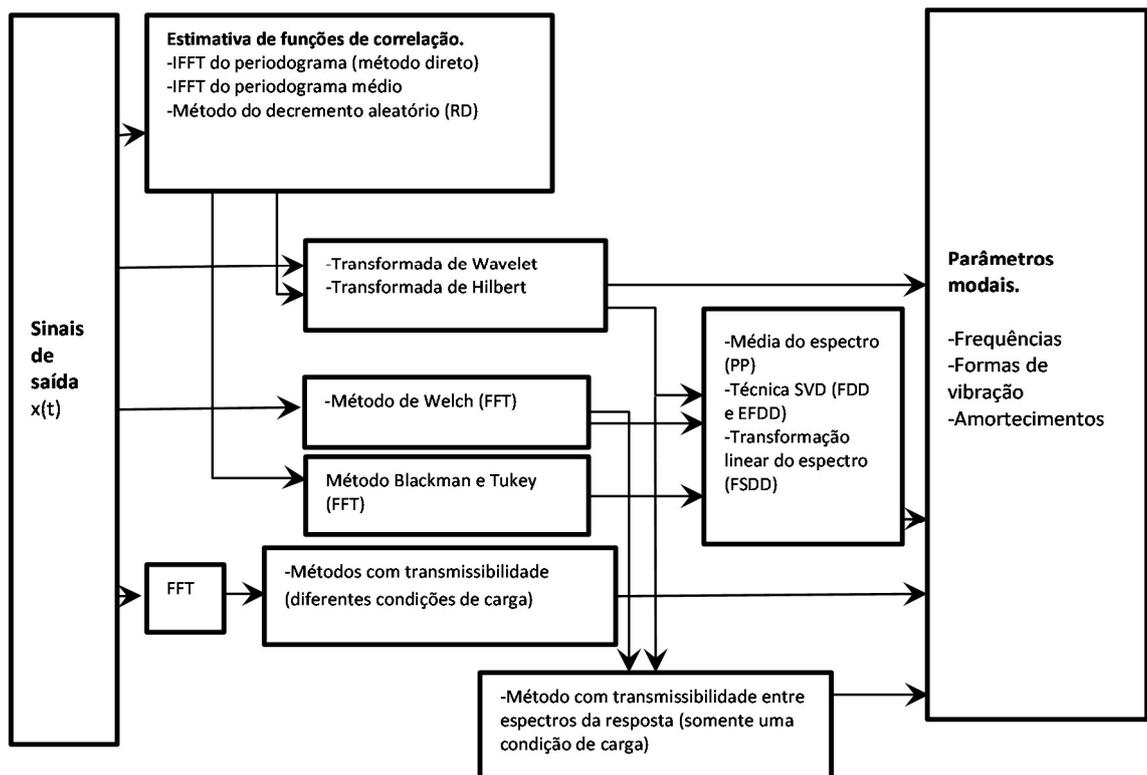


Figura 4 -- Sistematização dos principais métodos na análise modal operacional no domínio da frequência.

5. CONCLUSÕES

Notem-se duas suposições importantes em OMA: 1) uma excitação de tipo ruído branco que garante que as frequências naturais importantes do sistema serão excitadas, além de que outro tipo de frequências provenientes da excitação não será incluído na saída, e, 2) a excitação deve estar adequadamente distribuída na estrutura com o fim de excitar todos os modos de vibração. A partir destas duas suposições é possível avaliar diretamente os parâmetros modais importantes do sistema com somente a informação da saída.

Dessa forma, ressaltam-se duas variáveis necessárias para estimar parâmetros modais com a informação de só saída e referem-se principalmente a resposta espectral e as funções de correlação da resposta. Assim, pode-se estabelecer de modo geral que a base principal dos métodos de identificação modal para OMA no domínio da frequência encontra-se na definição da densidade espectral da resposta $[S_y(\omega)]$, e para os métodos no domínio do tempo (não tratados nesta revisão) na definição das funções de correlação da resposta $r_y(k)$.

Salienta-se a importância da propriedade da transmissibilidade quando tende a um pólo do sistema, a qual converge a uma relação de amplitudes de modos vibração que não depende das características das forças de excitação. A partir dessa propriedade se pode notar na atualidade uma abordagem diferente da análise modal operacional na qual não é considerado uma das mais importantes suposições da análise, como é a hipótese que a entrada ao sistema define-se como ruído branco, com um espectro constante. Suposição usada pela maioria dos métodos apresentados (PP, FDD, EFDD, RD-FDD, RD-EFDD e FSDD). Novas e recentes metodologias têm sido propostas não baseadas nesta suposição, tal como os métodos que usam transmissibilidade, chamados na literatura como TOMA (Transmissibility Operacional Modal Analysis).

6. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e a CAPES pelo suporte financeiro a este projeto de pesquisa.

7. REFERÊNCIAS

ANDERSEN, P. et al. Comparison of system identification methods using ambient bridge test data. Proceedings 17st IMAC., 1999, Kissimee, Florida.

ARAUJO, I.; MALDONADO, E.; CHO, G. Ambient vibration testing and updating of the finite element model of a simply supported beam bridge. **Frontiers of Architecture and Civil Engineering in China**, v. 5, n. 3, p. 344-354, 2011. ISSN 1673-7407. Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.1007/s11709-011-0124-8> >.

ASMUSSEN, J.; IBRAHIM, S.; BRINCKER, R. Random decrement: identification of structures subjected to ambient excitation. Proceedings 16st IMAC, 1998, Santa Barbara, California. p.914-921.

ASMUSSEN, J. C. **Modal analysis based on the random decrement technique: application to civil engineering structures**. 1997. (Ph.D). Denmark, University of Aalborg

ASMUSSEN, J. C.; IBRAHIM, S.; BRINCKER, R. Random decrement: identification of structures subjected to ambient excitation. Proceedings 16st IMAC, 1998, Santa Barbara, California. p.914-921.

BLACKMAN, R. B.; TUKEY, J. W. The measurement of power spectra. **Dove, Publications Inc., New York**, 1958.

BRINCKER, R.; KIRKEGAARD, P. H. Special issue on Operational Modal Analysis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 24, n. 5, p. 1209-1212, Jul 2010. ISSN 0888-3270. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000279131000001 >.

BRINCKER, R. et al. **Identification of dynamical properties from correlation function estimates**: Danish Society for Structural Science and Engineering 1992.

BRINCKER, R.; VENTURA, C.; ANDERSEN, P. Damping estimation by frequency domain decomposition. 19th International Modal Analysis Conference, 2001. p.698-703.

BRINCKER, R.; ZHANG, L.; ANDERSEN, P. Modal identification from ambient responses using frequency domain decomposition. Proceedings 18st IMAC, 2000, San Antonio, Texas. p.625-630.

BROWNJOHN, J. M. W. et al. Ambient vibration survey of the Bosphorus suspension bridge. **Earthquake engineering & structural dynamics**, v. 18, n. 2, p. 263-283, 1989. ISSN 1096-9845.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering**. **Prentice-Hall International Series in Civil Engineering and Engineering Mechanics**, 2001.

COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. **Mathematics of computation**, p. 297-301, 1965. ISSN 0025-5718.

DEVRIENDT, C.; DE SITTER, G.; GUILLAUME, P. An operational modal analysis approach based on parametrically identified multivariable transmissibilities. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 24, n. 5, p. 1250-1259, Jul 2010. ISSN 0888-3270. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000279131000005 >.

DEVRIENDT, C.; GUILLAUME, P. The use of transmissibility measurements in output-only modal analysis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 21, n. 7, p. 2689-2696, Oct 2007. ISSN 0888-3270. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000249611900001 >.

_____. Identification of modal parameters from transmissibility measurements. **Journal of Sound and Vibration**, v. 314, n. 1-2, p. 343-356, Jul 8 2008. ISSN 0022-460X. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000256195100021 >.

DOEBLING, S. W. et al. **Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review**. Los Alamos National Lab., NM (United States). 1996

EWINS, D. J. **Modal testing: theory, practice and application**. Research studies press Baldock, 2000.

FELBER, A. J. **Development of a hybrid bridge evaluation system**. 1993. (Ph.D). Department of Civil Engineering,, University of British Columbia,, Vancouver, Canada,.

FONTUL, M. et al. Transmissibility matrix in harmonic and random processes. **Shock and Vibration**, v. 11, n. 5-6, p. 563-571, 2004 2004. ISSN 1070-9622. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000226502800004 >.

GENTILE, C.; SAISI, A. Ambient vibration testing and condition assessment of the Paderno iron arch bridge (1889). **Construction and Building Materials**, v. 25, n. 9, p. 3709-3720, Sep 2011. ISSN 0950-0618. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000291780400007 >.

HAMTAEI, M. R.; ANVAR, S. A. Estimation of modal parameters of buildings by Wavelet Transform. The 14th World Conference on Earthquake Engineering, 2008, Beijing, China.

HAN, J.; LI, D.; LI, H. **Application of Hilbert-Huang transform and stochastic subspace identification for modal parameter identification of civil engineering structures**. 2007. 216-221 ISBN 978-7-5641-0958-5. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000251357300027 >.

HAYES, M. H. **Statistical digital signal processing and modeling**. John Wiley & Sons, 1996. ISBN 8126516100.

HE, X. H. et al. EMD-based random decrement technique for modal parameter identification of an existing railway bridge. **Engineering Structures**, v. 33, n. 4, p. 1348-1356, Apr 2011. ISSN 0141-0296. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000289026900028 >.

HOA, L. T. et al. **Output-only system identification using Wavelet transform**. Internacional Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 2010). Hanoi, Vietnam 2010.

HUANG, N. E. et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 454, n. 1971, p. 903-995, 1998. ISSN 1364-5021.

IBRAHIM, S. R. Efficient random decrement computation for identification of ambient responses. Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering, 2001, Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers. p.1-6.

JAMES, G. H.; CARNE, T. G.; LAUFFER, J. P. **The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating wind turbines**. Sandia National Labs., Albuquerque, NM (United States). 1993

KAY, S. M. **Intuitive probability and random processes using Matlab**. Springer, 2006. ISBN 0387241574.

LARDIES, J.; TA, M. N.; BERTHILLIER, M. Modal parameter estimation based on the wavelet transform of output data. **Archive of Applied Mechanics**, v. 73, n. 9-10, p. 718-733, Apr 2004. ISSN 0939-1533. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000221055200010 >.

LE, T.-P.; PAULTRE, P. Modal identification based on the time-frequency domain decomposition of unknown-input dynamic tests. n. Accepted Manuscript, 2013. Disponível em: < <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740313000805> >.

LE, T. H.; TAMURA, Y. Modal identification of ambient vibration structure using frequency domain decomposition and wavelet transform. The Seventh Asia-Pacific Conference on Wind Engineering, 2009, Taipei, Taiwan.

LIU, J. et al. Modal parameters identification of offshore platform using HHT method. Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference, 2012. p.1113-1118.

LIU, Y. C.; LOH, C. H.; NI, Y. Q. Stochastic subspace identification for output-only modal analysis: Application to super high-rise tower under abnormal loading condition. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 42, n. 4, p. 477-498, 2013. Disponível em: < <http://www.scopus.com/inward/record.url?eid=2-s2.0-84874779839&partnerID=40&md5=5d67f52db20b7a930e0b2fb59f0ccf71> >.

MAGALHAES, F.; CUNHA, A.; CAETANO, E. Vibration based structural health monitoring of an arch bridge: From automated OMA to damage detection. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 28, p. 212-228, Apr 2012. ISSN 0888-3270. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000301549900015 >.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFÉ, R. W. **Discrete-Time Signal Processing**. Prentice-Hall, 1989.

PEETERS, B.; DE ROECK, G. Stochastic system identification for operational modal analysis: A review. **Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the Asme**, v. 123, n. 4, p. 659-667, Dec 2001. ISSN 0022-0434. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000172894900014 >.

RIBERIO, A. M. R.; SILVA, J. M. M.; MAIA, N. M. M. On the generalization of the transmissibility concept. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 14, n. 1, p. 29-35, 2000.

RINGWOOD, J. Multivariable control using the singular value decomposition in steel rolling with quantitative robustness assessment. v. 3, n. 4, p. 495-503, 1995. Disponível em: < <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/096706619500021L> >.

RODRIGUES, J.; BRINCKER, R. Application of the Random Decrement Technique in Operational Modal Analysis. Proceedings 1st IOMAC Conference, 2005, Copenhagen, Denmark.

STRUM, R. D.; KIRK, D. E. **Contemporary linear systems using MATLAB**. Brooks/Cole Publishing Co., 1999. ISBN 0534371728.

UHL, T.; KLEPKA, A. Application of wavelet transform to identification of modal parameters of nonstationary systems. **Journal of theoretical and applied mechanics**, v. 43, n. 2, p. 277-296, 2005.

VILLALBA, J. D.; GOMEZ, I. D.; LAIER, J. E. Influence of Input Parameters on the Performance of an Artificial Neural Network Used to Detect Structural Damage. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2010, Rhodes, GREECE. Sep 19-25. p.1219-1222.

VILLALBA, J. D.; LAIER, J. E. Localising and quantifying damage by means of a multi-chromosome genetic algorithm. **Advances in Engineering Software**, v. 50, p. 150-157, Aug 2012. ISSN 0965-9978. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000306208500015 >.

WELCH, P. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: a method based on time averaging over short, modified periodograms. **Audio and Electroacoustics, IEEE Transactions on**, v. 15, n. 2, p. 70-73, 1967. ISSN 0018-9278.

YAN, W.; REN, W. On the Use of Continuous Wavelet Transmissibility for Structural Operational Modal Analysis. **Journal of Structural Engineering**, n. Accepted Manuscript, 2013. Disponível em: < <http://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%29ST.1943-541X.0000711> >.

YAN, W.-J.; REN, W.-X. Operational Modal Parameter Identification from Power Spectrum Density Transmissibility. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, v. 27, n. 3, p. 202-217, Mar 2012. ISSN 1093-9687. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000299929700004 >.

YE, Q. W.; FENG, Z. M.; HU, H. G. An Improved Random Decrement Algorithm and Applications. **Applied Mechanics and Materials**, v. 121, p. 4372-4376, 2012. ISSN 3037852828.

YU, D. H.; REN, W. X. EMD-based stochastic subspace identification of structures from operational vibration measurements. **Engineering Structures**, v. 27, n. 12, p. 1741-1751, Oct 2005. ISSN 0141-0296. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000231892600004 >.

ZHANG, L.; BRINCKER., R.; ANDERSEN, P. An overview of operational modal analysis: major development and issues. Proceedings 1st IOMAC, 2005, Copenhagen, Denmark.

ZHANG, L.; WANG, T.; TAMURA, Y. A frequency-spatial domain decomposition (FSDD) method for operational modal analysis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 24, n. 5, p. 1227-1239, Jul 2010. ISSN 0888-3270. Disponível em: < <Go to ISI>://WOS:000279131000003 >.