

MODELO ELÁSTICO-LINEAR DE SÓLIDO POROSO TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO

Gabriel Lopes da Rocha¹ & Adair Roberto Aguiar²

Resumo

Sólidos porosos pertencem a classe de materiais naturais e de engenharia que podem ser empregados em funções estruturais. Para estes materiais, as propriedades mecânicas dependem da sua microestrutura. A anisotropia da microestrutura de um meio poroso é caracterizada pelo tensor fabric. Para sólidos porosos elástico-lineares com matriz sólida isotrópica, é possível estabelecer uma relação entre o tensor de elasticidade, a fração volumétrica e o tensor fabric. Esta relação não determina todos os tipos possíveis de simetria do material poroso, restringindo-se apenas à simetria isotrópica, transversalmente isotrópica e ortotrópica. Neste trabalho é apresentado um modelo alternativo para o caso transversalmente isotrópico. Mostra-se que o modelo obtido é mais simples e possui menos variáveis a serem determinadas experimentalmente se comparado ao modelo clássico.

Palavras-chave: Sólidos porosos. Tensor fabric. Elasticidade linear. Anisotropia.

LINEARLY ELASTIC MODEL FOR A TRANSVERSALY ISOTROPIC POROUS SOLID

Abstract

Porous solids belong to a class of natural and engineering materials that can be employed in structural functions. The mechanical properties of these materials depend on their microstructure. The microstructural anisotropy of a porous medium is characterized by the fabric tensor. For porous solids that are linearly elastic and have isotropic matrices, it is possible to establish a relationship between the elasticity tensor, the porous volume fraction, and the fabric tensor. This relation does not determine all possible types of symmetry of the material, being restricted only to isotropic, transversely isotropic, and orthotropic types of symmetries. This paper presents an alternative model for the transversely isotropic case. It is shown that this model obtained is simpler and have fewer variables to be determined experimentally than the classical model.

Keywords: Porous solid. Fabric tensor. Linear elasticity. Anisotropy.

Linha de Pesquisa: Materiais e Mecânica dos Materiais.

1 INTRODUÇÃO

Sólidos porosos constituem uma classe de materiais naturais e artificiais, amplamente estudados em engenharia de estruturas. Exemplos incluem sólidos celulares (madeira, polímeros, osso), materiais granulares (solos, areia, etc.), sólidos geológicos (rocha) e materiais sinterizados (cerâmicas, tijolo, blocos perfurados, etc.). Em aplicações, os sólidos porosos podem ser empregados em funções estruturais, tais como, concreto e blocos cerâmicos, sendo, portanto de grande interesse o estudo do comportamento mecânico destes materiais para a engenharia.

As propriedades mecânicas dos sólidos porosos dependem de fatores da microestrutura como porosidade, formato, tamanho e distribuição dos poros na matriz sólida. Para estes materiais é

¹ Doutorando no Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia - PPGIB-EESC/FMRP/IQSC-USP, gabrielmat04@usp.br

² Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, aguiarar@sc.usp.br



conveniente diferenciar dois tipos de anisotropia: local e global. A anisotropia local refere-se à anisotropia do material constituinte da matriz sólida, a qual não depende da presença de poros, enquanto que a anisotropia global refere-se à anisotropia induzida pelo formato, tamanho e distribuição dos poros na matriz sólida. Deste modo, o sólido poroso pode apresentar comportamento anisotrópico mesmo quando a matriz sólida é isotrópica.

Whitehouse (1974) avaliou a anisotropia global nas secções planas e polidas de uma amostra de material poroso utilizando a distância média de interceptação L (em inglês, *Mean Intercept Length – MIL*) ao longo de uma linha reta inclinada de um ângulo θ em relação a um referencial inercial entre as interfaces matriz sólida/poros, vide Figura 1 (a). Ao construir diagramas polares com os pontos (θ, L) , Whitehouse (1974) constata que estes pontos podem ser interpolados pela equação de uma elipse, vide Figura 1 (b). Em três dimensões, Harrigan e Mann (1984) apresentam uma técnica que consiste em obter elipses sobre três planos da amostra mutuamente ortogonais, sendo estas as projeções ortogonais de um elipsóide sobre estes planos, vide Figura 1 (c). A equação do elipsóide é dada por $1/L^2(\theta) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \mathbf{n}$, com \mathbf{M} um tensor simétrico de segunda ordem positivo definido e \mathbf{n} um versor que define a direção sobre a qual infere-se o valor de L . Cowin (1985) define o tensor fabric $\mathbf{H} = \sqrt{\mathbf{M}}$ como uma medida da orientação dos poros em um sólido poroso.

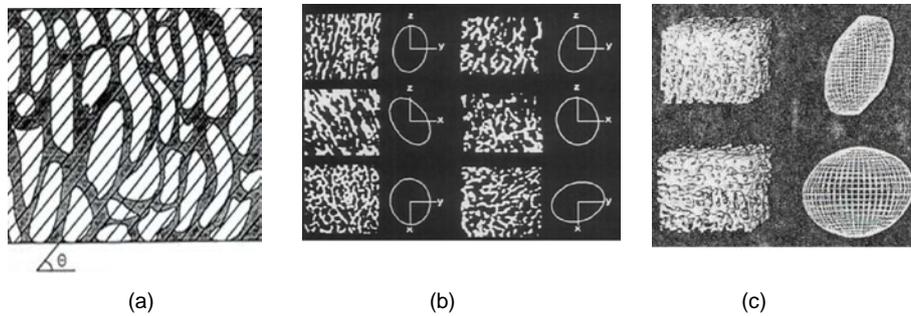


Figura 1 – (a) Medição de L em um plano (Odgaard, 1997); (b) Elipses em três planos ortogonais (Adaptado de Feldkamp et al., 1989); (c) Representação do elipsóide em três dimensões (Adaptado de Goldstein et al., 1993).

Cowin (1985) obtêm uma relação entre as componentes do tensor de elasticidade, as componentes do tensor fabric e a fração volumétrica para materiais porosos com simetria material isotrópica. O autor observou que o tensor de elasticidade obtido não fornece todos os tipos possíveis de simetria microestrutural, restringindo-se apenas à isotropia, isotropia transversal e a ortotropia. Neste trabalho é apresentada a simplificação proposta por Rocha (2012) para o caso em que o sólido poroso tem simetria material isotrópica e simetria microestrutural transversalmente isotrópica. Este é um resultado importante para investigações em andamento da generalização da relação entre o tensor de elasticidade, a fração volumétrica e o tensor fabric quando os materiais porosos têm simetria material transversalmente isotrópica e ortotrópica.

2 METODOLOGIA

Pela Lei de Hooke Generalizada, relativo a um sistema de coordenadas cartesianas (O, x_1, x_2, x_3) , as componentes T_{ij} do tensor tensão de Cauchy \mathbf{T} estão relacionadas linearmente com as componentes E_{kl} do tensor deformação infinitesimal \mathbf{E} por $T_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$, sendo C_{ijkl} as componentes do tensor de elasticidade de quarta ordem \mathbf{C} para $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Ao considerar isotrópica a matriz do meio elástico poroso e que a anisotropia deste meio é resultante somente da distribuição dos poros, Cowin (1985) supõe que a função resposta mecânica do material poroso elástico $\mathbf{T} = \mathbf{F}(\nu, \mathbf{E}, \mathbf{H})$ satisfaz $\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T = \mathbf{F}(\nu, \mathbf{Q} \mathbf{E} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{Q}^T)$, $\forall \mathbf{Q} \in Ort$, com ν sendo a fração volumétrica e Ort o conjunto dos tensores de segunda ordem ortogonais. A função $\mathbf{F}(\nu, \mathbf{E}, \mathbf{H})$ é uma função isotrópica que, segundo Zheng (1993), possui a representação

$$\mathbf{T} = f_1 \mathbf{I} + f_2 \mathbf{H} + f_3 \mathbf{H}^2 + f_4 \mathbf{E} + f_5 \mathbf{E}^2 + f_6 (\mathbf{HE} + \mathbf{EH}) + f_7 (\mathbf{H}^2 \mathbf{E} + \mathbf{EH}^2) + f_8 (\mathbf{HE}^2 + \mathbf{E}^2 \mathbf{H}) \quad (1)$$

com f_1 a f_8 funções que dependem de ν , $\text{tr} \mathbf{H}$, $\text{tr} \mathbf{H}^2$, $\text{tr} \mathbf{H}^3$, $\text{tr} \mathbf{E}$, $\text{tr} \mathbf{E}^2$, $\text{tr} \mathbf{E}^3$, $\text{tr} \mathbf{EH}$, $\text{tr} \mathbf{HE}$, $\text{tr} \mathbf{HE}^2$, $\text{tr} \mathbf{H}^2 \mathbf{E}^2$. Supondo \mathbf{T} linear com relação à deformação infinitesimal \mathbf{E} e a inexistência de tensão residual, as componentes C_{ijkl} do tensor de elasticidade \mathbf{C} relacionam-se com as componentes H_{ij} do tensor fabric \mathbf{H} por

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & (a_1 \delta_{km} + a_2 H_{km} + a_3 H_{kl} H_{lm}) \delta_{ij} + (a_2 \delta_{km} + b_1 H_{km} + b_2 H_{kl} H_{lm}) H_{ij} + (a_3 \delta_{km} + \\ & b_2 H_{km} + b_3 H_{kl} H_{lm}) H_{iq} H_{qj} + c_1 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{jk} \delta_{im}) + c_2 (H_{ik} \delta_{jm} + H_{mi} \delta_{jk} + \\ & H_{mj} \delta_{ik} + H_{jk} \delta_{im}) + c_3 (H_{iq} H_{qk} \delta_{jm} + H_{mr} H_{ri} \delta_{jk} + H_{mr} H_{rj} \delta_{ik} + H_{jq} H_{qk} \delta_{im}) \end{aligned} \quad (2)$$

com $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ e c_3 parâmetros do material que dependem de ν , $\text{tr} \mathbf{H}$, $\text{tr} \mathbf{H}^2$, $\text{tr} \mathbf{H}^3$. Substituindo os autovalores \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 e \mathbf{H}_3 do tensor simétrico \mathbf{H} na Eq. (2) é possível verificar que as componentes do tensor de elasticidade caracterizam a simetria de um material isotrópico, transversalmente isotrópico e ortotrópico quando o tensor \mathbf{H} possui um, dois e três autovalores distintos, respectivamente. No caso em que o tensor \mathbf{H} possui dois autovalores iguais, as componentes C_{ijkl} do tensor de elasticidade, Eq. (2), são dadas por

$$\begin{aligned} C_{1111} &= a_1 + 2c_1 + 2(a_2 + 2c_2) \mathbf{H}_1 + (2a_3 + b_1 + 4c_3) \mathbf{H}_1^2 + 2b_2 \mathbf{H}_1^3 + b_3 \mathbf{H}_1^4 \\ C_{2222} &= a_1 + 2c_1 + 2(a_2 + 2c_2) \mathbf{H}_2 + (2a_3 + b_1 + 4c_3) \mathbf{H}_2^2 + 2b_2 \mathbf{H}_2^3 + b_3 \mathbf{H}_2^4 \\ C_{1122} &= a_1 + a_2 (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) + a_3 (\mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_2^2) + b_1 \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 + b_2 (\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2^2 + \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1^2) + b_3 \mathbf{H}_1^2 \mathbf{H}_2^2 \\ C_{2233} &= a_1 + 2a_2 \mathbf{H}_2 + (2a_3 + b_1) \mathbf{H}_2^2 + 2b_2 \mathbf{H}_2^3 + b_3 \mathbf{H}_2^4 \\ C_{1212} &= c_1 + c_2 (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2) + c_3 (\mathbf{H}_1^2 + \mathbf{H}_2^2), \quad C_{2323} = c_1 + 2c_2 \mathbf{H}_2 + 2c_3 \mathbf{H}_2^2 \end{aligned} \quad (3)$$

com $C_{2222} = C_{2233} + 2C_{2323}$ e $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ funções que dependem de ν , $\text{tr} \mathbf{H}$, $\text{tr} \mathbf{H}^2$, $\text{tr} \mathbf{H}^3$.

Segundo Cowin (1985), os parâmetros $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ e c_3 podem ser determinados experimentalmente em um único teste em uma amostra, utilizando as frequências de ondas ultrassônicas em diferentes direções. Na próxima seção será apresentada a simplificação da Eq. (3) obtida em Rocha (2012).

3 DESENVOLVIMENTO

Quando o tensor \mathbf{H} possui dois autovalores iguais, a distribuição de poros do material caracteriza a simetria transversalmente isotrópica. Rocha (2012), supõe que a função resposta mecânica do material poroso $\mathbf{T} = \mathbf{F}(\nu, \mathbf{E})$ é uma função transversalmente isotrópica que, segundo Zheng (1993), possui a representação

$$\mathbf{T} = g_1 \mathbf{I} + g_2 \mathbf{E} + g_3 \mathbf{E}^2 + g_4 \bar{\mathbf{e}} \otimes \bar{\mathbf{e}} + g_5 (\bar{\mathbf{e}} \otimes \mathbf{E} \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{E} \bar{\mathbf{e}} \otimes \bar{\mathbf{e}}) + g_6 (\bar{\mathbf{e}} \otimes \mathbf{E}^2 \bar{\mathbf{e}} + \mathbf{E}^2 \bar{\mathbf{e}} \otimes \bar{\mathbf{e}}) \quad (4)$$

com $\bar{\mathbf{e}}$ sendo o versor de mesma direção do eixo de simetria do material e g_1 a g_6 funções que dependem de ν , $\text{tr} \mathbf{E}$, $\text{tr} \mathbf{E}^2$, $\text{tr} \mathbf{E}^3$, $\text{tr} \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}$, $\text{tr} \mathbf{e} \cdot \mathbf{E}^2 \mathbf{e}$. Supondo \mathbf{T} linear com relação à deformação infinitesimal \mathbf{E} e a inexistência de tensão residual, Rocha (2012) mostra que as componentes C_{ijkl} do tensor de elasticidade infinitesimal são dadas por

$$\begin{aligned} C_{1111} &= a_1 + a_2 + 2c_1 + b_1 + b_2 + 4c_2, \quad C_{2222} = a_1 + 2c_1, \quad C_{2233} = a_1, \\ C_{1122} &= a_1 + b_1, \quad C_{2323} = c_1, \quad C_{1212} = c_1 + 2c_2, \end{aligned} \quad (5)$$

com $C_{2222} = C_{2233} + 2C_{2323}$ e $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ funções que dependem somente de ν .

4 RESULTADOS OBTIDOS

Ao linearizar a função resposta de um material poroso transversalmente isotrópico, Eq. (4), é obtido uma relação entre o tensor de elasticidade e a fração volumétrica ν . Observa-se que as componentes do tensor de elasticidade, Eq. (5), obtidas por Rocha (2012), quando comparadas às componentes do tensor elasticidade, Eq. (3), obtidas por Cowin (1985), não dependem dos autovalores H_1 e H_2 do tensor fabric e possuem menos parâmetros elásticos a serem determinados experimentalmente, sendo que os parâmetros da Eq. (5), $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$, dependem somente da fração volumétrica ν , enquanto que os parâmetros da Eq. (3), $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$, dependem de $\nu, \text{tr } \mathbf{H}, \text{tr } \mathbf{H}^2, \text{tr } \mathbf{H}^3$.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho é apresentada uma simplificação obtida por Rocha (2012) do modelo proposto por Cowin (1985), o qual descreve o comportamento mecânico de sólidos porosos, isotrópicos e elástico-lineares, quando o a simetria microestrutural é transversalmente isotrópica. Além disso, mostra-se que o modelo obtido por Rocha (2012) é mais simples e possui menos variáveis a serem determinadas experimentalmente se comparado ao modelo proposto por Cowin (1985).

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Departamento de Engenharia de Estruturas (SET/ USP) e ao Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia (PPGIB-EESC/FMRP/IQSC-USP) por propiciar as condições de infra-estrutura necessárias para a realização deste trabalho e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

7 REFERÊNCIAS

- COWIN S.C. The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor. **Mechanics of Materials**, v.4, p. 137-47, 1985.
- FELDKAMP L. A., GODSTEIN, S. A., PARFITT, A. M., JESION, G., KLEEREKOPER, M. The direct examination of three-dimensional bone architecture in vitro by computed tomography. **Journal of Bone and Mineral Research**, p. 3 – 11, 1989.
- GOLDSTEIN, S. A.; WILSON, D. L.; SONSTEGARD, D. A.; MATTHEWS, L. S. The Mechanical properties of human trabecular bone as a function of metaphyseal location. **Journal of Biomechanics**, v.16, p. 959 – 969, 1983.
- HARRIGAN TP, MANN RW. Characterization of microstructural anisotropy in orthotropic materials using a second rank tensor. **Journal of Material Science**. V.19: 761-767. 1984
- ODGAARD, A. Three-dimensional methods for quantification of cancellous bone. **Bone**, v. 20: 315-328, 1997.
- ROCHA, G. L. **Estudo da propriedade de simetria de ossos trabeculares**. 2012. 93 p. Dissertação (Mestrado em Bioengenharia) – PPGIB-EESC/FMRP/IQSC-USP, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- WHITEHOUSE, W. J. The Quantitative Morphology of Anisotropic Trabecular Bone. **Journal of Microscopy**, v. 101, 153-168, 1974.
- ZHENG Q.-S. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. Part I. Two dimensional orthotropic and relative isotropic functions and three dimensional relative isotropic functions. **International Journal of Engineering Science**, 31, 1399-1409, 1993.