ISSN 1809-5860

TÉCNICA DE SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE APLICADA AO MEC PARA PROBLEMAS ELASTOSTÁTICOS 3D

Fabio Carlos da Rocha[1], Humberto Breves Coda[2] & Wilson Sergio Venturini[3]

Resumo

Trabalhos recentes vêm mostrando interesse na utilização dos métodos numéricos com aproximação de alta ordem, a fim de obter melhor precisão dos resultados com menor aumento de esforço computacional. Uma das principais dificuldades na utilização do Método dos Elementos de Contorno (MEC) de alta ordem é a falta de métodos eficazes para o desenvolvimento preciso das diversas integrais singulares sobre elementos curvos. Com o objetivo de contribuir na precisão do cálculo das integrais singulares, este trabalho faz uma análise no cálculo dos núcleos das integrais singulares e hipersingulares do MEC para problemas elastostáticos tridimensionais por meio da técnica de subtração de singularidade.

Palavras-chave: Integrais singulares e hipersingulares. Método dos Elementos de Contorno. Subtração de singularidade.

SINGULARITY SUBTRACTION TECHNIQUE APPLIED TO THE BEM FOR 3D ELASTOSTATIC PROBLEMS

Abstract

Recent works have shown interest in the use of numerical methods with high-order approximation aiming to obtain better accuracy to result with smaller computational effort. The main difficulties when using the Boundary Element Method (BEM) with high-order elements is the lack of effective methods for developing the various singular integrals over curved elements. To increase the calculation accuracy of singular integrals, this work does to analysis at the calculation at kernels of the singular and hyper-singular equations of BEM for three-dimensional elastostatic problems by singularity subtraction technique.

Keywords: Singular and hyper-singular equations. Boundary Element Method. Singularity subtraction.

Linha de Pesquisa: Métodos numéricos.

[1] Doutorando em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, fabcivil@sc.usp.br
[2] Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, hbcoda@sc.usp.br
[3] Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, venturin@sc.usp.br

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um dos métodos numérico mais importante em Ciência e Engenharia. Dentre as suas vantagens tem-se a redução da dimensionalidade para problemas lineares e a precisão na resolução de problemas de domínios infinitos ou semi-infinitos. Na busca da obtenção de melhor precisão dos resultados e com menor aumento do esforço computacional tem recentemente aumentado o interesse na utilização de elementos de alta ordem. Uma das principais dificuldades na utilização do MEC de alta ordem é a falta de métodos eficazes para o desenvolvimento preciso das diversas integrais singulares sobre elementos curvos. Diante desta problemática, este trabalho vem contribuir na aplicação e melhoramento de métodos já existente (Guiggiani et AL, 1992; Gao, 2010) para o cálculo numérico das integrais singulares e hipersingulares do MEC aplicados a problemas tridimensional elastostáticos.

2 METODOLOGIA

Existem diversas formas para obter as formulações do método dos elementos de contorno (MEC), tais como pelo teorema da reciprocidade, pelos conceitos dos resíduos ponderados e pela abordagem variacional. A formulação do MEC para problemas elastostáticos 3D para ponto fonte pertencente ao domínio V é dada por (Aliabadi, 2002)

$$\boldsymbol{u}(Y) = \int_S \boldsymbol{U}(Y,x)\cdot\boldsymbol{t}(x)dS - \int_S \boldsymbol{T}(Y,x)\cdot\boldsymbol{u}(x)dS + \int_V \boldsymbol{U}(Y,X)\cdot\boldsymbol{b}(X)dV \tag{1}$$

$$\sigma(Y) = \int_S \boldsymbol{D}^{312}(Y,x)\cdot\boldsymbol{t}(x)dS - \int_S \boldsymbol{S}^{312}(Y,x)\cdot\boldsymbol{u}(x)dS + \int_V \boldsymbol{D}^{312}(Y,x)\cdot\boldsymbol{b}(X)dV \tag{2}$$

Onde $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{b}$ são os deslocamentos, as forças de superfície e as forças de corpo, respectivamente. Os pontos X e x representam valores de campo no domínio e no contorno do problema, respectivamente. Já o ponto Y representa o ponto fonte pertencente ao domínio V.

3 DESENVOLVIMENTO

Neste item é apresentado o tratamento de singularidade adotado para regularizar as equações integrais (1) e (2). Para obter este objetivo, é utilizada a formulação geral proposta por Guiggiani et al (1992):

$$I = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\theta_1^i}^{\theta_2^i} \int_0^{\hat{\rho}^i(\theta)} \left[F^i(\rho,\theta) - \left(\frac{F_{-2}^i(\theta)}{\rho^2} + \frac{F_{-1}^i(\theta)}{\rho} \right) \right] d\rho\, d\theta + \int_{\theta_1^i}^{\theta_2^i} F_{-1}^i(\theta) \ln\left| \frac{\hat{\rho}^i(\theta)}{\beta^i(\theta)} \right| d\theta \\ \displaystyle - \int_{\theta_1^i}^{\theta_2^i} F_{-2}^i(\theta) \left[\frac{\gamma^i(\theta)}{\left(\beta^2(\theta)\right)^i} + \frac{1}{\hat{\rho}^i(\theta)} \right] d\theta \end{array} \right\} \tag{3}$$

4 RESULTADOS OBTIDOS OU ESPERADOS

No caso em que o ponte fonte pertence ao elemento de integração, as integrais do MEC tornam singular e devem ser subtraída esta instabilidade aplicando a Eq. (3), tornando as equações do MEC para problemas elastostáticos da seguinte forma

$$\boldsymbol{G}_V^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \tilde{\boldsymbol{K}}(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta \tag{4}$$

$$\boldsymbol{H}_V^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[\tilde{W}(\rho,\theta) - \frac{\tilde{W}_{-1}(\theta)}{\rho}\right]\rho\, d\rho\, d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{W}_{-1}(\theta)\ln\left|\frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)}\right| d\theta \tag{5}$$

$$\bar{\boldsymbol{H}}_V^k = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[\tilde{D}(\rho,\theta) - \frac{\tilde{D}_{-1}(\theta)}{\rho}\right]\rho\, d\rho\, d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tilde{D}_{-1}(\theta)\ln\left|\frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)}\right| d\theta \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{G}}_V^k = {} & \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{\hat{\rho}(\theta)} \left[\tilde{S}(\rho,\theta) - \left(\frac{\tilde{S}_{-2}(\theta)}{\rho^2} + \frac{\tilde{S}_{-1}(\theta)}{\rho}\right)\right]\rho\, d\rho\, d\theta \\ & + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{\tilde{S}_{-1}(\theta)\ln\left|\frac{\hat{\rho}(\theta)}{\beta(\theta)}\right| - \tilde{S}_{-2}(\theta)\left[\frac{\gamma(\theta)}{\beta^2(\theta)} + \frac{1}{\hat{\rho}(\theta)}\right]\right\} d\theta\end{aligned} \tag{7}$$

A precisão da técnica de subtração de singularidade é verificada através de um elemento curvo apresentado na Figura 1, e para os ângulos de 4.712 rad, 5.102 rad e 5.498 rad.

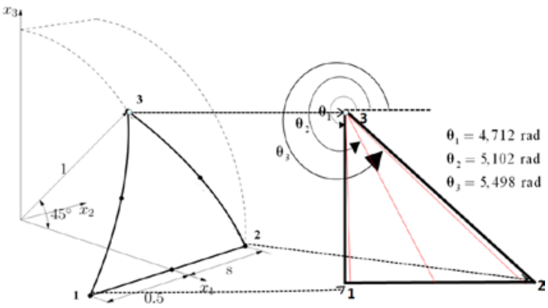

Figura 1 – Elemento curvado e os ângulos de verificação da subtração de singularidade.

A figura 2 apresenta o comportamento do tratamento de singularidade dos integrandos do primeiro termo do lado direito das Eq. (5) com o parâmetro s=0,5.

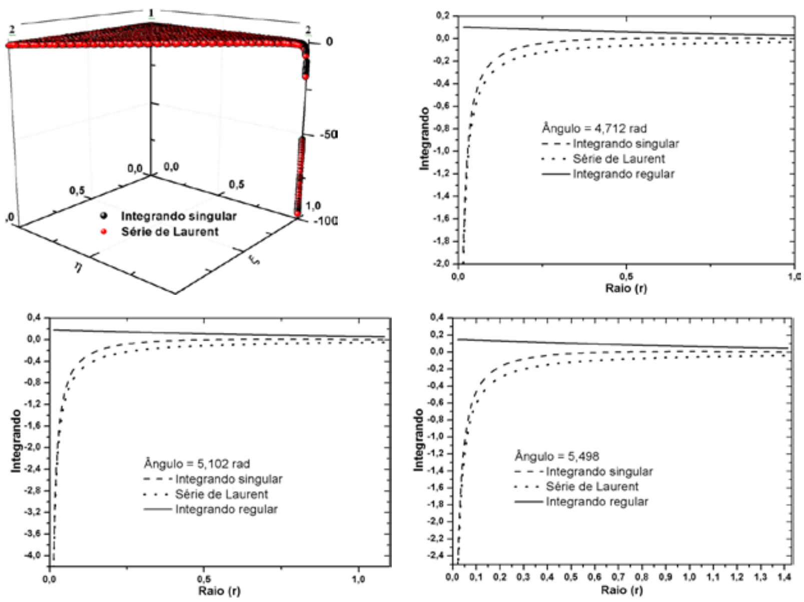

Figura 2 – Integrando singular $\tilde{W}_{31} = \boldsymbol{T}_{31}N^3 J$, o primeiro termo da série de Laurent $\tilde{W}_{-1}$ e o integrando regular; ponto fonte posição 3. $(\xi,\eta) = (0,1)$ e $s = 0,5$.

É possível observar que a subtração de singularidade para os integrandos regularizados, na direção radial, é pouco influenciada pela distorção do elemento. No entanto, cuidados devem ser tomados na realização das integrações numéricas do segundo termo das Eq. (5)-(7) quando o elemento torna-se muito distorcido. A Figura 3 mostra a variação rápida do termo $1/A(\theta)$ à medida que o valor do parâmetro s aumenta, ou seja, tornando o termo $1/A(\theta)$ com características de quase singularidade. Este cuidado, não observado por Guiggiani et al (1992), deve ser considerado, pois para elementos com distorções significativas aparece o efeito de quase singularidade nestas integrações o que pode prejudicar o cálculo numérico das mesmas.

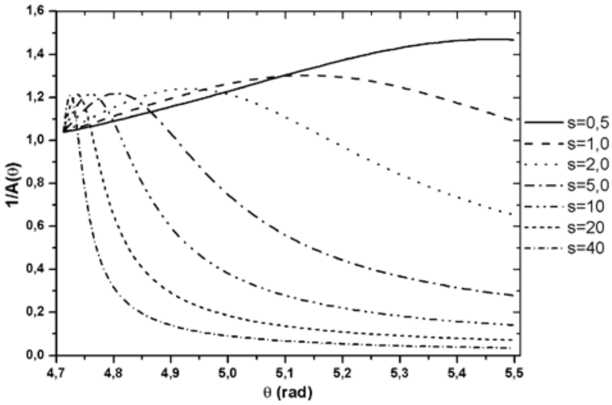

Figura 3 – Gráfico de $1/A(\theta)$ para vários valores de s, com ponto fonte na posição 3 da Fig (1).

5 CONCLUSÕES PARCIAIS

Métodos mais eficientes e com alta precisão são cruciais para a análise pelo Método dos Elementos de Contorno de alta ordem. Em Guiggiani et al (1992), foi proposta uma estrutura unificada para tratar as integrais singulares do MEC de diversas ordens. Verificou-se a precisão, na diração radial, da proposta unificada de Guiggiani em comparação com os núcleos singulares e pôde observar sua boa representatividade. No entanto, quando é realizada a análise na direção angular pode ser observado que à medida que é variado o parâmetro s, ou seja, à medida que o elemento curvo torna-se distorcido, o termo $1/A(\theta)$ sofre o efeito de camada-limite (quase singularidade). Efeito este que não foi relatado por Guiggiani et al (1992). Desta forma, faz-se necessário maior cuidado quando a integração é realizada na direção de θ e não apenas na direção radial quando são utilizados elementos curvos com distorção.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e o segundo autor também agradece à FAPESP (Fundação de Amparo á Pesquisa do Estado de São Paulo) pelo suporte financeiro concedido para o desenvolvimento deste trabalho.

7 REFERÊNCIAS

ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method:** applications in solid and structures. England: Wiley, 2002. 598 p.

GAO, X. W. An effective method for numerical evaluation of general 2D and 3D high order singular boundary integrals. **Computer methods in applied mechanics and engineering**,V. 199, n. 45-48, p. 2856-2864, Nov., 2010. ISSN: 0045-7825.

GUIGGIANI, M.; KRISHNASAMY, G.; RUDOLPHI, T. J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. **ASME Journal of Applied Mechanics**,V. 59, n. 3, p. 604-614, Set., 1992. ISSN: 0021-8936.