

ESTIMADOR DE ERRO BASEADO EM RECUPERAÇÃO DO GRADIENTE PARA O MEFG

Rafael Marques Lins¹ & Sergio Persival Baroncini Proença²

Resumo

Um novo estimador de erro a posteriori para o método dos elementos finitos generalizados (MEFG) é aqui apresentado visando fornecer estimativas e indicadores de erro confiáveis. O estimador proposto estende ao MEFG a técnica “superconvergent patch recovery” (SPR), proposta para o MEF convencional. O procedimento MEFG-SPR explora o conceito de partição da unidade atrelada a nuvens para obter os campos de tensões recuperadas em pontos do domínio. As funções polinomiais que definem os valores nodais recuperados são identificadas por meio da estratégia “singular value decomposition” (SVD). Em particular, implementa-se uma modificação no MEFG para considerar de maneira apropriada os elementos de mistura, que incluem nós enriquecidos e não enriquecidos, melhorando o estimador de erro. Para avaliar o desempenho do procedimento proposto, considera-se um problema de barra em flexão. As normas energia do erro da solução recuperada, bem como o índice global de efetividade do estimador são apresentadas, comparando-se as soluções numérica e analítica.

Palavras-chave: Estimador de Erro. Singular Value Decomposition. Elementos de Mistura. Método dos Elementos Finitos Generalizados.

ERROR ESTIMATOR BASED ON GRADIENT RECOVERY FOR THE GFEM

Abstract

A new a posteriori error estimator for the generalized finite element method (GFEM) is hereby considered aiming to provide reliable error estimates and indicators. The proposed estimator extends to the GFEM the superconvergent patch recovery (SPR) technique, proposed for FEM standard. The GFEM-SPR procedure explores the partition of unity concept attached to clouds to obtain recovered stress fields in domain points. The polynomial functions which define the recovered nodal values are identified using the singular value decomposition (SVD) strategy. In particular, it is implemented a modification in the GFEM to consider properly the blending elements, that include enriched and not enriched nodes, improving the error estimator. In order to assess the performance of the procedure hereby proposed, it is considered a bending bar problem. The error energy norms of the recovered solutions, as well the global effectivity index of the estimator are presented by comparing numerical and analytic solutions.

Keywords: Error Estimator. Singular Value Decomposition. Blending Elements. Generalized Finite Element Method.

Linha de Pesquisa: Métodos Numéricos.

¹ Doutorando em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, mlins@sc.usp.br

² Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, persival@sc.usp.br



1 INTRODUÇÃO

A aplicação dos Métodos dos Elementos Finitos Partição da Unidade (Babuška e Melenk, 1997), como é o caso do Método dos Elementos Finitos Generalizados (Duarte et al, 2000; Strouboulis et al, 2001; Babuška et al, 2004), vem crescendo nos últimos anos especialmente devido a algumas características interessantes apresentadas por tais métodos como: aproximações locais melhoradas mediante enriquecimentos seletivos e liberdade de não necessitar ajustar a malha na presença de descontinuidades.

Apesar do bom desempenho apresentado pelo MEFM, a possibilidade de enriquecimentos seletivos introduz os chamados elementos de mistura (elementos que contêm nós com e sem enriquecimentos atrelados). Tais elementos perturbam localmente a precisão numérica e, portanto, exigem um tratamento especial. Entre as alternativas propostas para superar este entrave, destaca-se o *Corrected XFEM* (Fries, 2008), empregado no presente trabalho, que fundamentalmente propõe construir uma nova função de enriquecimento para o elemento de mistura.

Por outro lado, a investigação de estimadores de erro precisos visando avaliar a resposta numérica dos métodos partição da unidade ainda é limitada, sendo as contribuições pioneiras neste sentido dadas por Babuška et al. (1998) e Strouboulis et al. (2001).

Neste trabalho, apresenta-se um novo estimador de erro a posteriori, denominado SPR-SVD. Este estimador contempla os conceitos das técnicas *superconvergent patch recovery* (SPR) (Zienkiewicz e Zhu, 1992a e 1992b) e *singular value decomposition* (SVD) (Quarteroni et al, 2000). O uso do SVD é o aspecto original a ser destacado, evitando o emprego de qualquer tipo de minimização de funcional como requerido pelo SPR tradicional.

2 A NOVA TÉCNICA DE RECUPERAÇÃO (SPR-SVD)

Basicamente a ideia desta nova técnica de recuperação seria simplesmente estender os conceitos contidos tanto no SPR quanto no SVD para o contexto do MEFM. Entretanto, devido à presença das funções de enriquecimento e assumindo que as mesmas são exclusivamente polinomiais, existe a possibilidade que o grau da aproximação para deslocamentos atrelada a cada elemento da nuvem nodal seja diferente. Nesta situação o SPR-SVD adota para a aproximação polinomial da tensão recuperada dentro da nuvem o polinômio completo de aproximação dos deslocamentos de maior grau, comparando-se todos os elementos da nuvem. Por exemplo, a Figura 1 mostra uma nuvem e seu respectivo campo de tensões recuperadas para uma componente i .

Para a determinação do polinômio que aproxima os campos de tensão recuperada dentro das nuvens, o SPR-SVD segue um procedimento diferente quando comparado com o SPR. Naquele caso, os coeficientes são calculados por meio do SVD. Esta técnica consiste, essencialmente, na decomposição da matriz do sistema que determina os coeficientes, baseada em problemas de autovalores. A escolha desta técnica é justificada porque ela garante a existência de uma inversa da matriz, mesmo quando a mesma é retangular. Observa-se que a matriz retangular ocorre quando o número de pontos superconvergentes adotado é maior do que o número de incógnitas a determinar.

As tensões recuperadas de cada nuvem apresentam um grau de aproximação definido pelo critério citado no primeiro parágrafo desta seção e podem ser escritas para uma componente i como:

$$\sigma_{p,i}^*(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j \hat{P}_j(x, y) \quad (1)$$

onde $\hat{P}_j(x, y)$ são os termos apropriados da base polinomial, a_j são os coeficientes polinomiais e o índice n refere-se à dimensão escolhida para a base polinomial. O cálculo dos a_j é realizado através da imposição da igualdade entre os valores fornecidos pela aproximação $\sigma_{p,i}^*(x, y)$ e os valores

superconvergentes $\hat{\sigma}_i$. Isto gera o sistema a seguir, resolvido com o SVD para cada componente de tensão:

$$\mathbf{A} \mathbf{a} \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_i \quad (2)$$

Uma vez determinados todos os campos de tensão recuperada emprega-se a partição da unidade para definir um único valor para cada uma das componentes nas regiões de intersecção de mais de uma nuvem. Portanto, em cada elemento o campo de tensão recuperada pode ser escrito como:

$$\sigma_i^* = \mathbf{N} \sigma_{p,i}^* \quad (3)$$

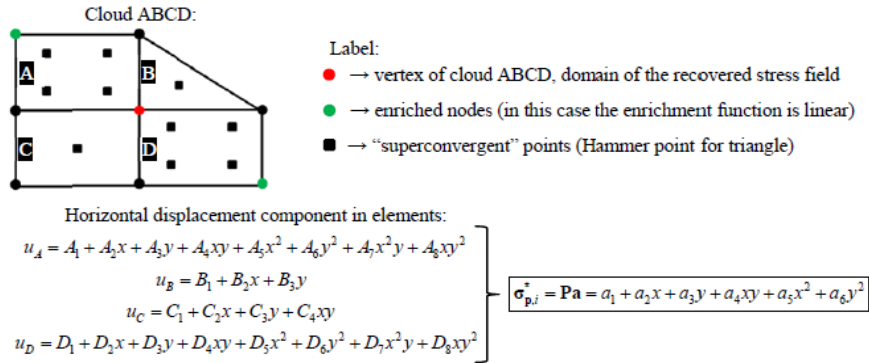


Figura 1 – Esquema usado para definir as tensões recuperadas em uma nuvem arbitrária.

3 EXEMPLO NUMÉRICO

Nesta seção, um exemplo numérico considerando um problema clássico com solução analítica conhecida foi usado para avaliar a precisão da técnica proposta. O problema analisado é uma viga engastada com carregamento parabólico em sua extremidade livre (Figura 2). Os parâmetros elásticos do material, carregamento e valores geométricos adotados estão presentes na mesma Figura 2. As condições de contorno de Dirichlet são impostas por meio da penalização e as funções de enriquecimento empregadas estão indicadas na relação (4) onde r_c se refere ao raio da nuvem.

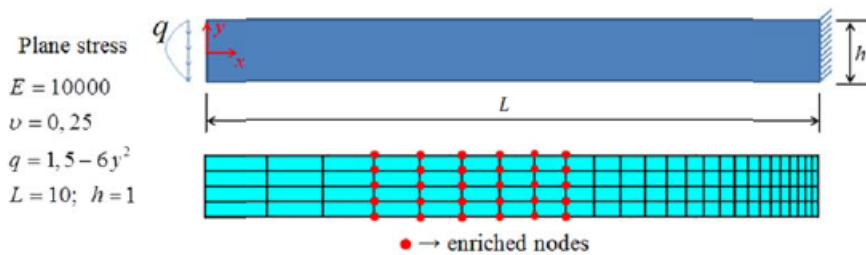


Figura 2 – Dados geométricos e malha adotada para viga engastada.

$$L = \left\{ 1, \frac{x}{r_c}, \frac{y}{r_c}, \frac{xy}{r_c}, \frac{x^2}{r_c^2}, \frac{y^2}{r_c^2} \right\} \quad (4)$$

A Figura 3a indica que o papel do procedimento de recuperação SPR-SVD é simplesmente melhorar a precisão nas regiões sem enriquecimento, uma vez que na parte enriquecida a solução é suficientemente precisa desde início. Apesar do tratamento oriundo do emprego do *Corrected XFEM* nos elementos de mistura a solução recuperada é destacadamente menos precisa em tais regiões.

A Figura 3b, como esperado, mostra um erro mínimo nos elementos totalmente enriquecidos e um erro maior nos elementos de mistura. Esse fato vem a confirmar que a presença dos elementos de

mistura não pode ser negligenciada. A distribuição dos erros estimados calculada com o SPR-SVD é bem similar à distribuição de referência, inclusive essa afirmação está consistente com índice de efetividade global indicado na mesma figura.

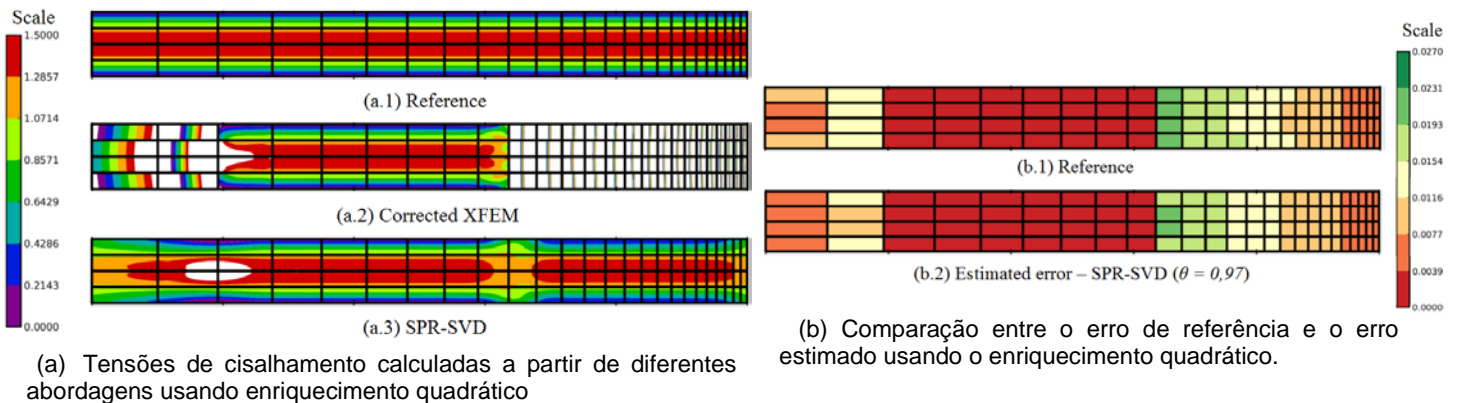


Figura 3 – Resultados obtidos analisados para viga engastada indicada na Figura 2.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho, apresentou-se um estimador de erro a posteriori concebido no contexto do MEFG e/ou *Corrected XFEM* e combinando conceitos do SPR e do SVD. A técnica de recuperação proposta consiste em alternativa viável para melhoria da precisão dos campos de tensão, bem como para a construção de um estimador de erro confiável. Sugerem-se duas linhas para a continuidade das investigações no tema: extensão aos problemas da mecânica da fratura elástico linear e melhorar a recuperação na vizinhança dos elementos de mistura.

5 REFERÊNCIAS

- BABUŠKA, I.; MELENK, J.M. The partition of unity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. 40:727-758, 1997.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J.E. Generalized finite element methods – main ideas, results and perspective. **International Journal of Computational Methods**. 1:67-103, 2004.
- BABUŠKA, I.; STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; GANGARAJ, S.K.; UPADHYAY, C.S. A posteriori error estimation for finite element and generalized finite element method. **Technical Report 98-01**. TICAM. University of Texas at Austin. 1998
- DUARTE, C.A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J.T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers and Structures**. 77:215-232, 2000.
- FRIES, T-P. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. 75:503-532, 2008.
- QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI. (2000). **Numerical Mathematics**. Springer. New York.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. 190:4081-4193, 2001.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; ZHU, J.Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1: The recovery technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. 33:1331-1364, 1992a.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; ZHU, J.Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 2: Error estimates and adaptivity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. 33:1365-1382, 1992b.