

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA A UM PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO COM COEFICIENTES PERIÓDICOS RAPIDAMENTE OSCILANTES

Maria do Socorro Martins Sampaio¹ & Gabriel Lopes da Rocha²

Resumo

Estuda-se um problema de valor de contorno relacionado ao comportamento elástico de uma barra, heterogênea, com diâmetro desprezível e comprimento unitário submetida à ação de uma força de corpo periódica e rapidamente oscilante. A propriedade mecânica da barra varia rapidamente de forma periódica e contínua. Apresentam-se a solução analítica do problema e a aplicação do método de homogeneização assintótica para obter a expressão da propriedade efetiva e a equação do problema homogeneizado relacionado ao comportamento macroscópico da barra. Apresenta-se um exemplo numérico onde a propriedade da barra e a força de corpo variam segundo leis senoidais. A convergência da solução do problema original para a solução do problema homogeneizado correspondente e para a solução aproximada obtida com o método de homogeneização assintótica é analisada computacionalmente.

Palavras-chave: Método de homogeneização assintótica. Problema local. Equação homogeneizada. Coeficiente efetivo. Elasticidade linear.

ASYMPTOTIC HOMOGENIZATION METHOD APPLIED TO A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH QUICKLY OSCILLATING PERIODIC COEFFICIENT

Abstract

In this paper, a boundary value problem related to the elastic behavior of a heterogeneous bar with negligible diameter and unit length subjected to the action of a periodic and rapidly oscillating body force is studied. The mechanical property of the bar varies rapidly in a periodic and continuous way. The analytical solution to the problem and the asymptotic homogenization method application to obtain the effective coefficient and the averaged equation related to the macroscopic behavior of the bar is presented. A numerical example which the constitutive properties and body force vary according to sinusoidal laws is introduced. The convergence of the solution of the original problem to corresponding averaged equation is analyzed computationally.

Keywords: Asymptotic homogenization method. Local problem. Homogenized equation. Effective coefficient. Linear elasticity.

1 INTRODUÇÃO

A necessidade de estruturas cada vez mais leves, mais rígidas, mais resistentes à abrasão, ao

¹ Doutoranda em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, ssampaio@sc.usp.br

² Mestrando em Bioengenharia – PPGIB - EESC/FMRP/IQSC-USP, gabrielmat04@usp.br

impacto e à corrosão representa uma das principais motivações para a aplicação dos materiais compósitos na engenharia estrutural.

Estes materiais resultantes da combinação de dois ou mais materiais diferentes, além de reunir todas as propriedades de seus constituintes, podem ainda apresentar um conjunto de propriedades que nenhum de seus componentes apresenta individualmente. Esta característica, muito desejável, fez com que se intensificasse a aplicação dos materiais compósitos nas mais diversas áreas da engenharia civil, aeroespacial, aeronáutica, naval e biomédica nas últimas décadas.

Em muitas aplicações da engenharia estrutural é necessário conhecer os campos de deslocamentos, tensão e deformação da estrutura analisada. Quando constituída por material compósito, a boa previsão do comportamento da estrutura, ou seja, destes campos, depende de uma boa descrição das características e propriedades efetivas desse material.

Para determinar de forma satisfatória as propriedades mecânicas e o comportamento dos materiais compósitos é importante determinar um modelo micromecânico que não seja nem muito complexo e, conseqüentemente, de difícil resolução, e nem muito simples que não reflita as propriedades mecânicas e o comportamento real do material. De modo geral, é possível observar na microestrutura dos compósitos a existência de um elemento representativo que reúne todas as suas propriedades físicas e geométricas. No caso dos materiais compósitos com estrutura periódica, o elemento representativo pode ser a célula de periodicidade do mesmo. A existência deste elemento representativo facilita a aplicação de métodos matemáticos para o estudo e determinação das propriedades efetivas destes materiais. No caso particular de materiais compósitos com estrutura periódica cita-se o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

O MHA pode ser considerado um método de transição entre o problema heterogêneo original e o problema homogeneizado (KALAMKAROV et al., 2009). No MHA busca-se uma solução na forma de uma série assintótica em potências de um parâmetro geométrico pequeno, ϵ , com coeficientes que dependem de uma variável macroscópica, ou lenta, e outra microscópica, ou rápida (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). O parâmetro geométrico ϵ é definido como uma relação entre uma característica geométrica da célula periódica e uma característica geométrica do composto como um todo. O desenvolvimento assintótico desta solução permite obter uma sequência recorrente de problemas para os coeficientes das potências de ϵ . A partir destes problemas obtêm-se a equação do problema local definida sobre a célula básica e a equação do problema homogeneizado. A equação do problema local permite obter o comportamento microscópico correspondente a um comportamento macroscópico dado. A equação do problema homogeneizado não depende da variável rápida, uma vez que a oscilação rápida induzida pela microestrutura foi eliminada. Quando ϵ tende a zero, a solução do problema original converge para a solução do problema homogeneizado (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Este é um dos principais resultados da teoria de homogeneização assintótica, pois assegura a possibilidade de homogeneizar um material compósito de estrutura regular, ou seja, permite estudar o comportamento do sólido compósito heterogêneo original a partir de um sólido homogêneo equivalente.

Muitos são os estudos realizados nas últimas décadas para melhor entender e descrever o comportamento dos materiais compósitos. Na engenharia civil, muitos pesquisadores tem se dedicado ao estudo de misturas asfálticas, como por exemplo, o concreto betuminoso usinado a quente e a areia asfalto usinada a quente, empregados em obras de pavimentação (ALLEN et al., 2003; BERTHELOT et al., 2003; SOUZA, 2005). Porém, grande destaque merece o concreto de cimento Portland que segundo (MEHTA; MONTEIRO, 2008) além de ser o material de construção mais utilizado é o segundo material mais consumido no mundo perdendo apenas para a água. Este material comumente constituído por cimento, brita, areia e água, além de conferir forma às construções, quando associado ao aço desempenha importante função estrutural nas edificações. Embora seja um material compósito, anisotrópico e heterogêneo é prática comum de projeto modelá-lo, por simplicidade, como um material isotrópico e homogêneo. Devido a sua microestrutura altamente complexa é muito difícil elaborar modelos realistas a partir dos quais o comportamento deste material possa ser previsto com confiabilidade. O conhecimento da microestrutura e das propriedades individuais dos constituintes do concreto e a relação entre eles serve para auxiliar no controle de suas propriedades (MEHTA; MONTEIRO, 2008). Com o surgimento de métodos matemáticos que permitem modelar estes materiais e obter suas propriedades efetivas, observa-se um grande número de trabalhos que se propõem a levar em consideração as características reais deste material e assim melhor caracterizá-lo e explorá-lo nas aplicações. Por exemplo, os métodos de homogeneização como o MHA podem ser

empregados para obter os valores das frações volumétricas dos constituintes do concreto que otimizam as suas propriedades efetivas.

(CABRILLAC; MALOU, 2000) utilizam uma técnica de homogeneização baseada no método dos elementos finitos para modelar o comportamento mecânico e determinar as propriedades efetivas de um material poroso anisotrópico com poros elipsoidais uniaxialmente orientados. Os autores observaram que para um mesmo nível de porosidade, os materiais com poros elipsoidais são mais rígidos do que materiais com poros esféricos, e destacam a importância do método no estudo do comportamento de concretos aerados. (ELDEEN; TANIGUCHI, 2006) utilizam o MHA para simular o comportamento mecânico de concretos reforçados com fibras de aços. As fibras curtas são usualmente espalhadas na matriz de forma aleatória e, por isso, tal estrutura é de difícil modelagem. Para ser analisada pelo MHA esta distribuição aleatória precisa ser transformada em uma distribuição periódica equivalente. Baseados na hipótese de que o comportamento do material com distribuição aleatória apresenta quase as mesmas propriedades que o material com as fibras combinadas nas direções perpendiculares, os autores propõem uma distribuição periódica para a célula básica e deduzem as condições de contorno na mesma. Além disso, os autores deduzem as propriedades efetivas do material homogeneizado para os casos plástico e elástico e apresentam um exemplo numérico em que estudam o efeito da fração de volume das fibras nas propriedades do material. (FARAGE et al., 2009) utilizam o MHA para determinar a propriedade efetiva de concretos leves a partir das propriedades elásticas do agregado e da argamassa empregados em sua composição. Os autores realizaram simulações numéricas para concretos fabricados com a mesma argamassa e cinco tipos de agregados leves, com frações volumétricas variadas. Os erros entre os resultados obtidos com as simulações numéricas do MHA e os resultados experimentais foram inferiores a 3%.

Em aplicações mais gerais cita-se o trabalho de (BRAVO-CASTILLERO et al., 2006) que aplicam o MHA para obter fórmulas para as propriedades efetivas de compostos elásticos reforçados com fibras circulares distribuídas em células periódicas hexagonais e estudam os casos limites de fibras vazias ou infinitamente rígidas. (BRAVO-CASTILLERO et al., 2009) aplicam o MHA para determinar as expressões analíticas das propriedades efetivas de compósitos multilaminados termo-magneto-eleto-elásticos periódicos.

O objetivo deste trabalho é aplicar o MHA a um Problema de Valor de Contorno (PVC) relacionado ao comportamento elástico de uma barra heterogênea de diâmetro desprezível e comprimento unitário. A propriedade da barra oscila periódica e rapidamente. A barra está submetida à ação de uma força de corpo também rapidamente oscilante. O trabalho foi organizado conforme descrito a seguir. Na seção 2 descreve-se o PVC estudado, obtém-se a expressão da solução analítica do problema original, aplica-se o MHA ao estudo do PVC e obtém-se a expressão da solução analítica do problema homogeneizado. Na seção 3 obtém-se as expressões das soluções analíticas para o problema original, para o problema homogeneizado e para a solução aproximada obtida com o MHA considerando o caso particular em que a propriedade da barra e a força de corpo são descritas por leis senoidais. Finalmente, a análise de convergência das soluções obtidas é apresentada na subseção 3.3 e a conclusão na seção 4.

2 O MHA APLICADO AO ESTUDO DE UM PVC COM COEFICIENTES PERIÓDICOS E RAPIDAMENTE OSCILANTES

Nesta seção, apresenta-se a solução analítica de um PVC que modela o comportamento elástico de uma barra heterogênea com diâmetro desprezível e comprimento unitário submetida à ação de uma força de corpo periódica e rapidamente oscilante e aplica-se o MHA para obter uma solução formal para este problema.

2.1 Descrição do PVC

Seja uma barra que ocupa uma região Ω , com um contorno $\partial\Omega$, heterogênea, com diâmetro desprezível e comprimento unitário submetida à ação de uma força de corpo, f , periódica e rapidamente oscilante. Como o diâmetro é desprezível, assume-se $\Omega = (0,1)$ com $\partial\Omega = \{0,1\}$. Seja k o coeficiente de rigidez da barra e u o deslocamento mecânico. O problema de valor de contorno

consiste em achar o deslocamento $u: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{d}{dx} \left(k(x/\varepsilon) \frac{du}{dx} \right) = f(x, x/\varepsilon); \quad x \in (0, 1), \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \tag{2}$$

$$u(1) = 1, \tag{3}$$

onde $k(y)$ é da classe $C^\infty \left(\left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right] \right)$, positiva, limitada e 1-periódica e $f(x, y)$ é da classe $C^\infty \left([0, 1] \times \left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right] \right)$ e 1-periódica em y , sendo $y = x/\varepsilon$ com $0 < \varepsilon \ll 1$.

2.2 Solução analítica do PVC

Considerando as propriedades das funções $k(y)$ e $f(x, y)$ descritas anteriormente, pode-se integrar a Eq. (1) como

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{k(x/\varepsilon)} \left[\int_0^x f(s, s/\varepsilon) ds + C_1 \right]. \tag{4}$$

Integrando a Eq. (4) tem-se

$$u(x, \varepsilon) = \int_0^x \frac{1}{k(\theta/\varepsilon)} \left[\int_0^\theta f(s, s/\varepsilon) ds + C_1 \right] d\theta + C_2. \tag{5}$$

As constantes C_1 e C_2 na Eq. (5) são obtidas a partir das condições de contorno do problema dadas pelas Eqs. (2) e (3). Utilizando a condição que $u(0) = 0$ dada na Eq. (2) chega-se a $C_2 = 0$. Portanto a Eq. (5) fica

$$u(x, \varepsilon) = \int_0^x \frac{1}{k(t/\varepsilon)} \left[\int_0^t f(s, s/\varepsilon) ds + C_1 \right] dt. \tag{6}$$

Utilizando a condição que $u(1) = 1$ dada na Eq. (3) obtém-se da Eq.(6) que C_1 é dada por

$$C_1 = \frac{1 - \int_0^1 \frac{1}{k(\theta/\varepsilon)} \left[\int_0^\theta f(s, s/\varepsilon) ds \right] d\theta}{\int_0^1 \frac{1}{k(\theta/\varepsilon)} d\theta}. \tag{7}$$

Finalmente, substituindo C_1 na Eq. (5) chega-se à expressão da solução analítica do problema original descrito pelas Eqs. (1)-(3) dada por

$$u(x, \varepsilon) = \int_0^x \frac{1}{k(\theta/\varepsilon)} \left[\int_0^\theta f(s, s/\varepsilon) ds + \frac{1 - \int_0^1 \frac{1}{k(\theta/\varepsilon)} \left[\int_0^\theta f(s, s/\varepsilon) ds \right] d\theta}{\int_0^1 \frac{1}{k(\theta/\varepsilon)} d\theta} \right] d\theta. \tag{8}$$

2.3 Homogeneização do PVC: aplicação do MHA

O MHA pode ser considerado como um método de transição entre o problema original, que contém na sua formulação um parâmetro pequeno relacionado às pequenas dimensões dos constituintes do compósito, e o problema homogeneizado, cuja solução não depende da microestrutura do material. As propriedades efetivas deste material homogêneo equivalente são determinadas através da solução dos chamados problemas locais formulados sobre a célula básica do material compósito. Além disso, a partir dos problemas locais podem-se determinar as tensões e as deformações no material compósito (KALAMKAROV et al., 2009).

Para obter uma solução formal do problema dado pelas Eqs. (1)-(3) pelo emprego do MHA utiliza-se a assintótica

$$u^{(\infty)} = \varepsilon^0 u_0(x, y) + \varepsilon^1 u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) + \dots, \quad (9)$$

onde $u_i(x, y)$ são funções 1-periódicas em y , ou seja, $u_i(x, y + 1) = u_i(x, y)$.

Derivando a assintótica $u^{(\infty)}$ dada na Eq. (9) em relação à variável lenta ou global, x , aplicando a regra da cadeia $\frac{d}{dx} \phi(x, y) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x}$, agrupando-se os termos em potências de ε e multiplicando a equação resultante por $k(x/\varepsilon)$, obtém-se

$$k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^{(\infty)}}{dx} = \varepsilon^{-1} k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial y} + \varepsilon^0 k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots \quad (10)$$

Aplicando o operador $L_\varepsilon(\bullet) \equiv \frac{d}{dx} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{d(\bullet)}{dx} \right)$ à Eq. (10) resulta na expressão

$$L_\varepsilon u^{(\infty)} = \frac{d}{dx} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{du^{(\infty)}}{dx} \right) = \varepsilon^{-1} \frac{d}{dx} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \varepsilon^0 \frac{d}{dx} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon^0 \frac{d}{dx} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{d}{dx} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \varepsilon \frac{d}{dx} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon^2 \frac{d}{dx} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \dots \quad (11)$$

Novamente, aplicando-se a regra da cadeia a cada um dos termos da Eq. (11), tem-se que

$$L_\varepsilon u^{(\infty)} = \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \varepsilon^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon^1 \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \varepsilon^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \dots \quad (12)$$

Utilizando o operador L_{pq} definido como $L_{pq} \phi \equiv \frac{\partial}{\partial p} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \phi}{\partial q} \right)$ na Eq. (12) e agrupando-se os termos em potência de ε na expressão resultante, obtém-se

$$L_\varepsilon u^{(\infty)} = \varepsilon^{-2} H_{-2}(x, y) + \varepsilon^{-1} H_{-1}(x, y) + \varepsilon^0 H_0(x, y) + \dots + \varepsilon^i H_i(x, y) + \dots \sim f(x, y), \quad (13)$$

onde os coeficientes H_i são dados por

$$H_{-2}(x, y) \equiv L_{yy} u_0, \quad (14)$$

$$H_{-1}(x, y) \equiv L_{xy} u_0 + L_{yx} u_0 + L_{yy} u_1, \quad (15)$$

$$H_0(x, y) \equiv L_{xx} u_0 + L_{xy} u_1 + L_{yx} u_1 + L_{yy} u_2, \quad (16)$$

$$H_i(x, y) \equiv L_{xx} u_i + L_{xy} u_{i+1} + L_{yx} u_{i+1} + L_{yy} u_{i+2}. \quad (17)$$

Na Eq. (13) busca-se que $L_\varepsilon u^{(\infty)}$ seja uma assintótica de f , ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe m_0 tal que $L_\varepsilon u^{(m)} - f = O(\varepsilon^n)$ para todo $m \geq m_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, sendo $u^{(m)} = \sum_{i=1}^m \varepsilon^i u_i(x, y)$. Para maiores detalhes ver, por exemplo, (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

Logo, os coeficientes H_i na Eq. (13) devem satisfazer as relações

$$H_{-2}(x, y) = 0, \quad (18)$$

$$H_{-1}(x, y) = 0, \quad (19)$$

$$H_0(x, y) = f(x, x/\varepsilon), \tag{20}$$

$$H_i(x, y) = 0, \text{ para } i \geq 1. \tag{21}$$

As Eqs. (18)-(21) constituem uma sequência recorrente de problemas a partir dos quais se obtêm as expressões das funções u_i , $i = 0, 1, 2, \dots$, elimina-se a oscilação rápida do problema original, obtêm-se as equações do problema local e do problema homogeneizado e a expressão do coeficiente efetivo.

Para resolver o sistema de equações dado nas Eq. (18)-(20) emprega-se o lema descrito a seguir.

Lema: Seja $L_{yy}N \equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(k(y) \frac{\partial N}{\partial y} \right)$ e sejam $N(y)$ e $F(y)$ funções diferenciáveis 1-periódicas.

Então, a condição necessária e suficiente para que a equação $L_{yy}N = F$ tenha solução na classe das funções 1-periódicas é que a média da função $F(y)$ seja zero, ou seja, $\langle F(y) \rangle = \int_0^1 F(y) dy = 0$.

A prova deste lema pode ser encontrada no livro de (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

2.3.1 Problema $H_{-2}=0$: Eliminação da oscilação rápida do problema original

Escrevendo-se o problema $H_{-2} = 0$ dado na Eq. (18) em sua forma expandida tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} \right) = 0. \tag{22}$$

Integrando a Eq. (22) em relação à variável local, y , e uma vez que $k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) > 0$ resulta

$$\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} = \frac{C(x)}{k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}. \tag{23}$$

Uma vez que $k(y)$ é limitada, é possível aplicar o operador média à Eq. (23) notando que u_0 é 1-periódica em y , obtendo-se que $C(x) = 0$, de onde

$$\frac{\partial u_0(x, y)}{\partial y} = 0, \tag{24}$$

ou seja, que u_0 é independente da variável rápida ou local, y , denotado como

$$u_0(x, y) = v_0(x), \tag{25}$$

eliminando-se assim a singularidade dos termos com potências negativas em ε e a oscilação rápida do problema.

2.3.2 Problema $H_{-1}=0$: Equação do problema local

Escrevendo-se o problema $H_{-1} = 0$ dado na Eq. (19) em sua forma expandida tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0. \tag{26}$$

Utilizando o resultado dado na Eq. (24), a Eq. (26) reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left(\frac{dv_0(x)}{dx} + \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial y} \right) \right] = 0. \tag{27}$$

Integrando a Eq.(27) em relação à variável rápida y , e uma vez que $k(x) > 0$ obtém-se

$$\frac{dv_0(x)}{dx} + \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{k(y)} C(x). \quad (28)$$

Aplicando o operador média em ambos os lados da Eq. (28), obtém-se

$$\int_0^1 \frac{dv_0(x)}{dx} dy + \int_0^1 \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} dy = C(x) \int_0^1 \frac{1}{k(y)} dy, \quad (29)$$

Devido a 1-periodicidade de $u_1(x,y)$ em relação à variável y , conclui-se que

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = C(x) \int_0^1 \frac{1}{k(y)} dy. \quad (30)$$

A partir da Eq. (30) obtém-se a expressão de $C(x)$ dada por

$$C(x) = \left\langle \frac{1}{k(y)} \right\rangle^{-1} \frac{dv_0(x)}{dx}, \quad (31)$$

onde $\langle 1/k(y) \rangle^{-1}$ é o coeficiente efetivo da barra homogeneizada denotado como \hat{K} .

Substituindo-se $C(x)$ dada na Eq. (32) na Eq. (28) e uma vez que $k(y) > 0$ e limitada, tem-se

$$\frac{dv_0(x)}{dx} + \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{k(y)} \hat{K} \frac{dv_0(x)}{dx}. \quad (32)$$

Isolando o termo que contém $u_1(x,y)$ na Eq. (32), tem-se

$$\frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} = \left(\frac{1}{k(y)} \hat{K} - 1 \right) \frac{dv_0(x)}{dx}. \quad (33)$$

Integrando-se ambos os lados da Eq. (33) em relação à variável rápida y e resolvendo a expressão obtida, tem-se a seguinte expressão

$$u_1(x,y) = \int_0^y \left(\frac{1}{k(\tau)} \hat{K} - 1 \right) d\tau \frac{dv_0(x)}{dx}. \quad (34)$$

A Eq. (34) pode ser reescrita como

$$u_1(x,y) = N_1(y) \frac{dv_0(x)}{dx}, \quad (35)$$

onde,

$$N_1(y) = \int_0^y \left(\frac{\hat{K}}{k(\tau)} - 1 \right) d\tau. \quad (36)$$

Nota-se que, usando o método da separação de variáveis (WEINBERGER, 1965), pode-se procurar $u_i(x,y)$ na forma

$$u_i(x,y) = N_i(y) \frac{d^i v_0(x)}{dx^i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Reescrevendo a Eq. (27) como

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{dv_0(x)}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1(x,y)}{\partial y} \right) = 0, \quad (38)$$

o primeiro termo na Eq. (38) pode ser escrito como

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k(y) \frac{\partial v_0(x)}{\partial x} \right) = \frac{dv_0(x)}{dx} \frac{dk(y)}{dy}. \quad (39)$$

Substituindo-se a Eq. (39) na Eq. (38), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k(x/\varepsilon) \frac{\partial u_1(x, y)}{\partial y} \right) = - \frac{dk(y)}{dy} \frac{dv_0(x)}{dx}. \quad (40)$$

Substituindo-se $u_1(x, y)$ dado na Eq. (35) na Eq. (40) e como $v_0(x)$ é uma função que depende apenas da variável lenta, x , obtém-se

$$\frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dN_1(y)}{dy} \right) \frac{dv_0(x)}{dx} = - \frac{dk(y)}{dy} \frac{dv_0(x)}{dx}. \quad (41)$$

Reorganizando os termos da Eq. (41) chega-se a equação do problema local definida sobre a célula periódica dada por

$$\frac{d}{dy} \left(k(y) \frac{dM_1(y)}{dy} \right) = 0, \quad (42)$$

onde $M_1(y) = N_1(y) + y$. Nota-se que a Eq. (42) satisfaz as condições do lema enunciado acima, de onde a existência da função $N_1(y) = M_1(y) - y$ está garantida.

2.3.3 Problema $H_0=0$: Equação do problema homogeneizado e expressão do coeficiente efetivo

Reescrevendo-se o problema $H_0 = 0$ dado na Eq. (20) em sua forma expandida tem-se

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = f(x, x/\varepsilon). \quad (43)$$

Isolando o termo $u_2(x, y)$ na Eq. (43), resulta

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + f(x, x/\varepsilon), \quad (44)$$

ou seja,

$$L_{yy}u_2 = -L_{xx}u_0 - L_{xy}u_1 - L_{yx}u_1 + f. \quad (45)$$

Para que exista a solução u_2 da Eq. (45), ela deve satisfazer as condições do lema enunciado acima, ou seja, que

$$F = -L_{xx}u_0 - L_{xy}u_1 - L_{yx}u_1 + f \quad (46)$$

seja tal que $\langle F(y) \rangle = 0$. Então, aplicando-se o operador média à Eq. (46) e igualando a zero, tem-se

$$\langle -L_{xx}u_0 - L_{xy}u_1 - L_{yx}u_1 + f \rangle = 0. \quad (47)$$

Uma vez que $\langle L_{yx}u_1 \rangle = 0$, a Eq. (44) pode ser reescrita como

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right\rangle = \langle f \rangle. \quad (48)$$

Lembrando-se as Eqs. (25) e (35), a Eq. (48) pode ser reescrita como

$$\left\langle k(y) \frac{dM_1(y)}{dy} \right\rangle \frac{d^2v_0(x)}{dx^2} = \langle f \rangle, \quad (49)$$

de onde se conclui que

$$\hat{K} \frac{d^2v_0(x)}{dx^2} = \langle f \rangle \quad (50)$$

é a equação do problema homogeneizado com as condições de contorno dadas por

$$v_0(0) = 0, \quad (51)$$

$$v_0(1) = 1, \quad (52)$$

obtidas substituindo-se a assintótica dada na Eq. (9) nas condições de contorno do problema original.

Na Eq. (50), \hat{K} é o coeficiente efetivo dado por

$$\hat{K} = \left\langle k(y) \frac{dM_1(y)}{dy} \right\rangle. \quad (53)$$

Utilizando a definição de $N_1(y)$ dada na Eq. (36), lembrando que $N_1(y) = M_1(y) - y$, e a definição de média de uma função, verifica-se facilmente que a Eq. (54) é equivalente à definição do coeficiente efetivo introduzida anteriormente expressa por $\hat{K} = \langle 1/k(y) \rangle^{-1}$.

2.4 Solução analítica do problema homogeneizado

Seja uma barra homogeneizada com coeficiente efetivo \hat{K} e seja $v_0(x)$ o deslocamento mecânico. O problema homogeneizado consiste em achar o deslocamento $v_0(x): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a Eq. (50) juntamente com as condições de contorno dadas nas Eqs. (51)-(52). O processo de obtenção da expressão da solução analítica do problema homogeneizado é o mesmo apresentado na seção 2.2 e fornece que

$$v_0(x) = \frac{1}{\hat{K}} \left[\int_0^x \int_0^\xi \langle f(s, s/\varepsilon) \rangle ds d\xi + x \left[\hat{K} - \int_0^1 \int_0^\xi \langle f(s, s/\varepsilon) \rangle ds d\xi \right] \right]. \quad (54)$$

Observa-se que a Eq. (54) é um caso particular da Eq. (8) quando a propriedade da barra, k , é constante.

3 EXEMPLO: BARRA COM PROPRIEDADE SENOIDAL SUBMETIDA A UMA FORÇA DE CORPO SENOIDAL

Nesta seção, determinam-se as expressões das soluções analíticas para o problema original, para o problema homogeneizado e para a solução aproximada obtida pelo MHA considerando-se o caso particular em que a propriedade da barra e a força de corpo são expressas respectivamente por $k(\frac{x}{\varepsilon}) = a + b \sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon})$ e $f(\frac{x}{\varepsilon}) = b \sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon})$.

3.1 Resultados analíticos

3.1.1 Solução analítica para o PVC considerando variações senoidais para a propriedade da barra e da força de corpo

Substituindo-se as expressões $k(\frac{x}{\varepsilon}) = a + b \sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon})$ e $f(\frac{x}{\varepsilon}) = b \sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon})$, onde $k(\frac{x}{\varepsilon})$ e $f(\frac{x}{\varepsilon})$ são funções ε -periódicas em relação à x , mas 1-periódicas em relação à $\frac{x}{\varepsilon}$, na Eq. (8) e fazendo-se todas as operações necessárias, tem-se que a expressão da solução analítica para o caso estudado é dada por

$$u(x, \varepsilon) = \left\langle \frac{1}{k(y)} \right\rangle^{-1} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} \ln \left[1 + \frac{b}{a} \sin\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right) \right] \right\} \int_0^x \frac{dy}{k(y)} - \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} \ln \left[1 + \frac{b}{a} \sin\left(2\pi \frac{x}{\varepsilon}\right) \right]. \quad (55)$$

Na Eq. (55) a e b devem ser escolhidos de forma que $\ln \left[1 + \frac{b}{a} \sin\left(2\pi \frac{x}{\varepsilon}\right) \right]$ exista. Portanto, a e b devem ser tais que $a > 0$ e $b > -a/\sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon})$.

3.1.2 Determinação do coeficiente efetivo

Seja o coeficiente efetivo da barra definido como $\hat{K} = \langle 1/k(y) \rangle^{-1}$ e lembrando a definição da média de uma função 1-periódica, tem-se que

$$\left\langle \frac{1}{k(y)} \right\rangle = \int_0^1 \frac{1}{k(y)} dy. \quad (56)$$

Resolvendo-se a Eq. (56) para $k(\frac{x}{\varepsilon}) = a + b \sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon})$ resulta

$$\left\langle \frac{1}{k(y)} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad (57)$$

para a e b tais que $a^2 > b^2$. Para outros valores de a e b deve-se calcular a Eq. (56) considerando tal hipótese.

Substituindo $a = 1$ e $b = \frac{1}{4}$, resulta da Eq. (57) que o valor do coeficiente efetivo é dado por

$$\hat{K} = \frac{1}{\left\langle \frac{1}{k(y)} \right\rangle} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} = 0,968. \quad (58)$$

3.1.3 Solução analítica do problema homogeneizado considerando variações senoidais para a propriedade da barra e para a força de corpo

Substituindo $k(y)$ e $f(y)$ na Eq. (54) a solução do problema homogeneizado, $v_0(x)$, se reduz a

$$v_0(x) = x. \quad (59)$$

3.1.4 Solução aproximada para o problema original obtida com o MHA

Aproximando-se a solução dada na Eq. (9) nos termos com potências de segunda ordem, tem-se

$$u^{(2)} = \varepsilon^0 u_0(x, y) + \varepsilon^1 u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y). \quad (60)$$

Substituindo $u_1(x, y)$ dada na Eq. (35) e $u_2(x, y)$ dada na Eq. (37) para $i = 2$, a Eq. (60) passa a ser escrita como

$$u^{(2)} = v_0(x) + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0'(x) + \varepsilon^2 N_2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0''(x). \quad (61)$$

Uma vez que a segunda derivada da função $v_0(x)$ dada na Eq. (59) é nula conclui-se que a solução $u^{(2)}$ para este caso particular pode ser aproximada pela solução $u^{(1)}$, ou seja,

$$u^{(1)} = v_0(x) + \varepsilon N_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v_0'(x). \quad (62)$$

Substituindo $v_0(x)$ dada na Eq. (59), $N_1(y)$ dada na Eq. (37) e $k(\frac{x}{\varepsilon}) = 1 + \frac{1}{4} \sin(2\pi \frac{x}{\varepsilon})$ na solução aproximada $u^{(1)}$ considerando que $a = 1$ e $b = \frac{1}{4}$ obtém-se

$$u^{(1)}(x, \varepsilon) = x - \varepsilon x + \frac{4\sqrt{17}}{17} \varepsilon \int_0^x \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \sin(2\pi s)} ds. \quad (63)$$

3.2 Resultados numéricos

Nesta seção, os resultados obtidos para o problema homogeneizado são comparados com a solução analítica do problema original e com a solução aproximada obtida pelo MHA para os diferentes valores do parâmetro pequeno $\varepsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ e $\frac{1}{64}$.

3.2.1 Propriedade do material

A Fig. 1 mostra o comportamento da propriedade do material não-homogeneizado comparada com o coeficiente efetivo obtido após a homogeneização da barra. Em todos os casos, a linha cheia representa a solução para o coeficiente efetivo da barra dada pela Eq. (58) e a linha tracejada, representa a propriedade do material dada pela função seno para os diferentes valores do parâmetro pequeno ε no intervalo $(0,1)$. Observa-se da Fig. 1 que, à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$, a propriedade da barra oscila rapidamente.

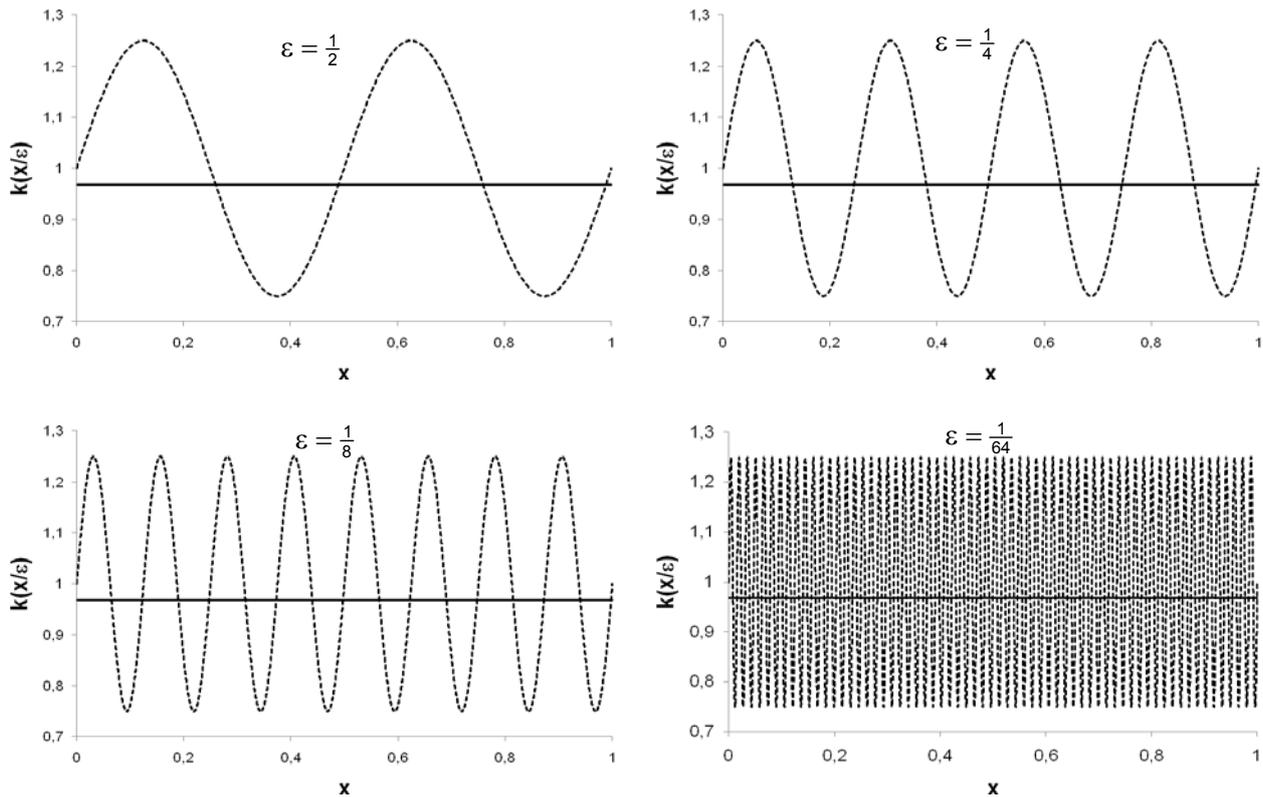
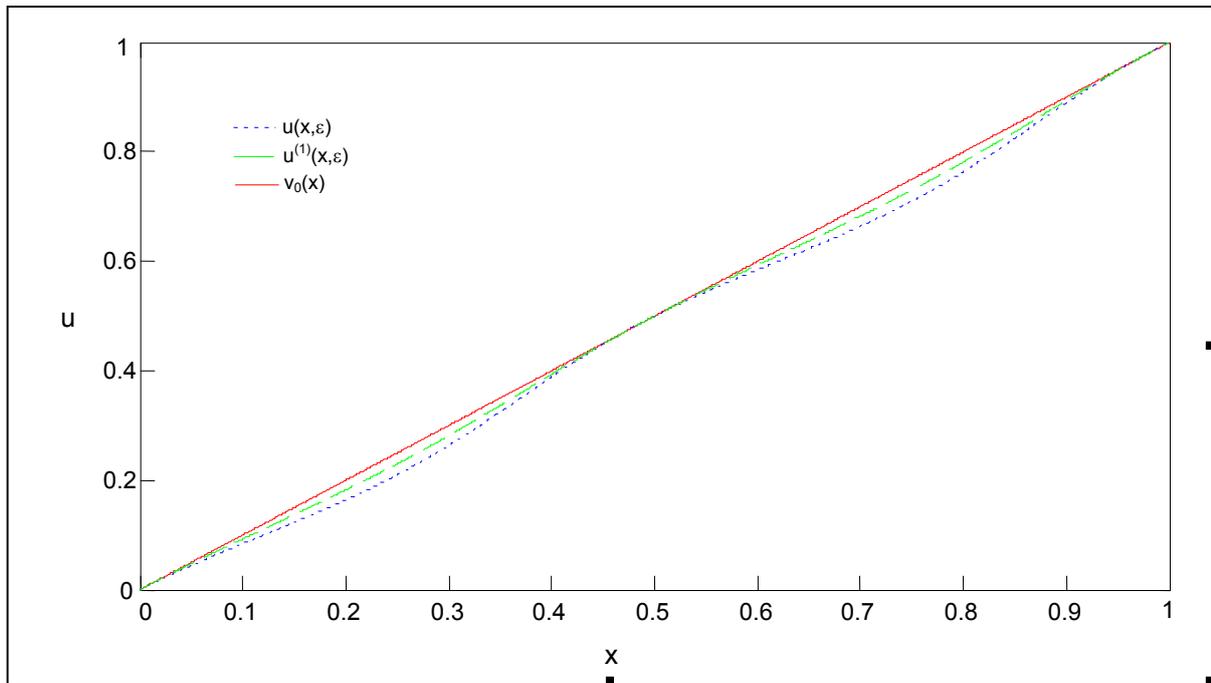
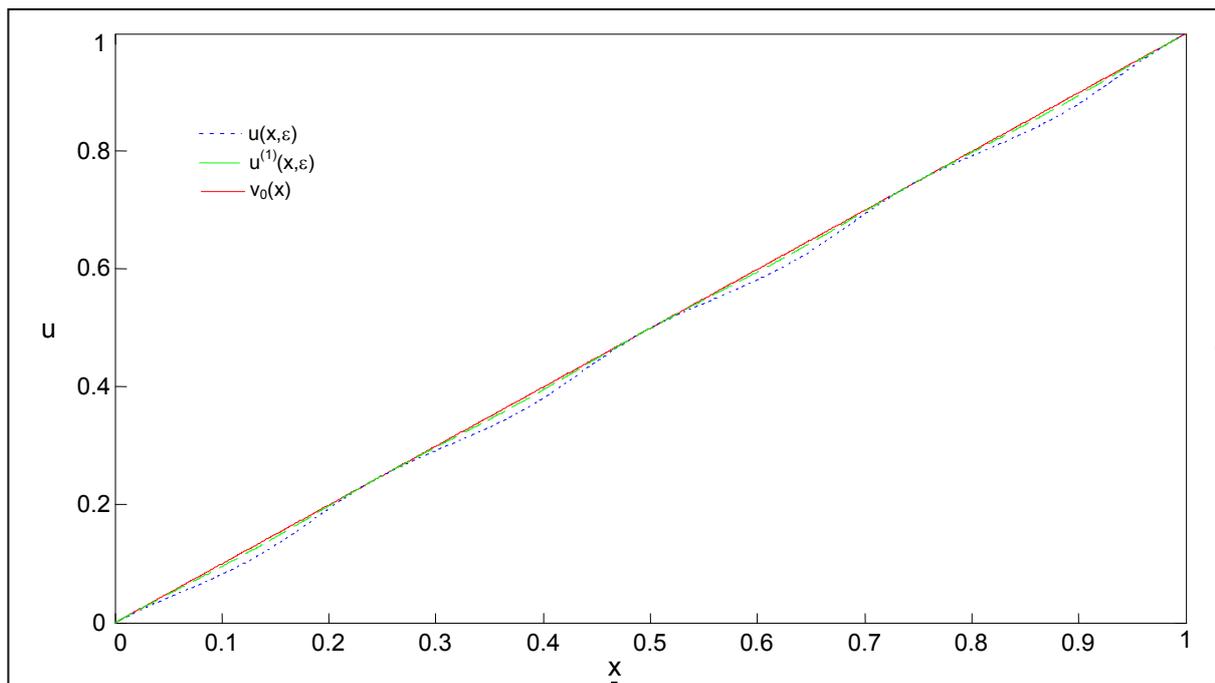


Figura 1 – Comportamento da propriedade do material para diferentes valores de ε .

Do ponto de vista numérico a oscilação rápida da propriedade do material é uma característica desfavorável, pois exige um grande esforço computacional para descrever de forma satisfatória a solução procurada, ou seja, para resolver as pequenas escalas do problema.

3.2.2 Deslocamento da barra

As Figs. 2-5 mostram as curvas da solução do problema homogeneizado, $v_0(x)$, dada na Eq. (58), do problema original, $u(x, \varepsilon)$, dada na Eq. (55) e da solução aproximada, $u^{(1)}(x, \varepsilon)$, obtida com o MHA dada na Eq. (63) para os diferentes valores do parâmetro pequeno ε no intervalo $(0,1)$.

Figura 2 – Curvas das soluções $u(x, \varepsilon)$, $v_0(x)$, e $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ para $\varepsilon = 1/2$.Figura 3 – Curvas das soluções $u(x, \varepsilon)$, $v_0(x)$, e $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ para $\varepsilon = 1/4$.

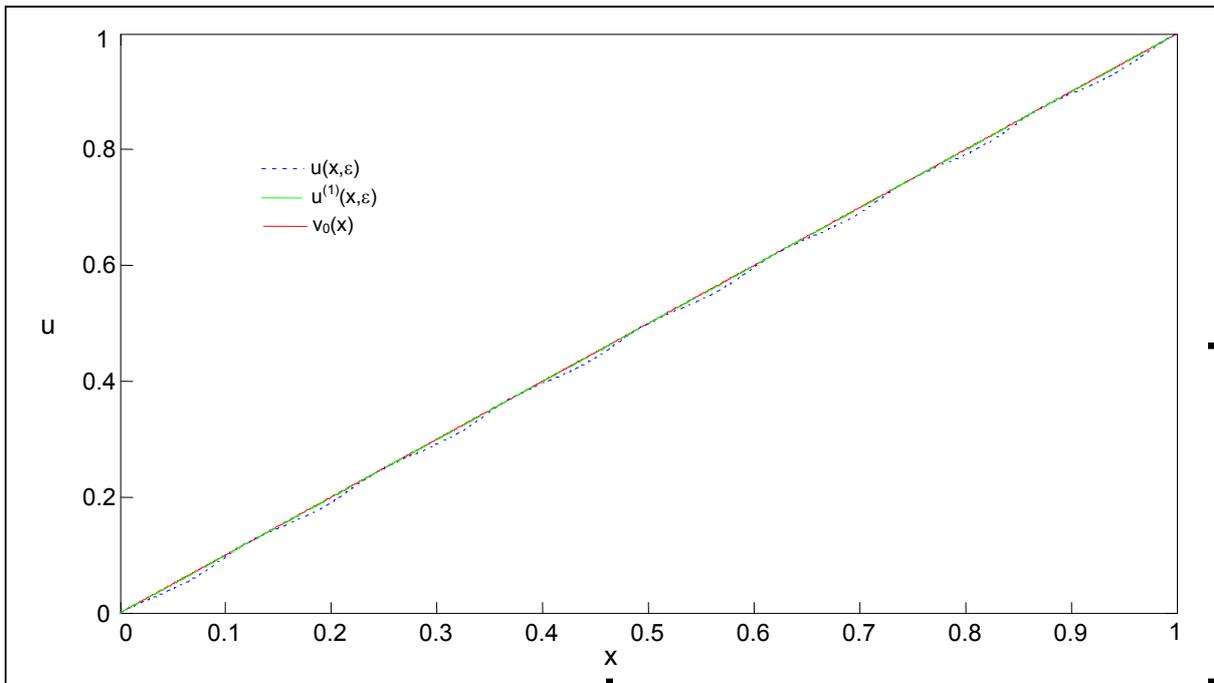


Figura 4 – Curvas das soluções $u(x, \varepsilon)$, $v_0(x)$ e $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ para $\varepsilon = 1/8$.

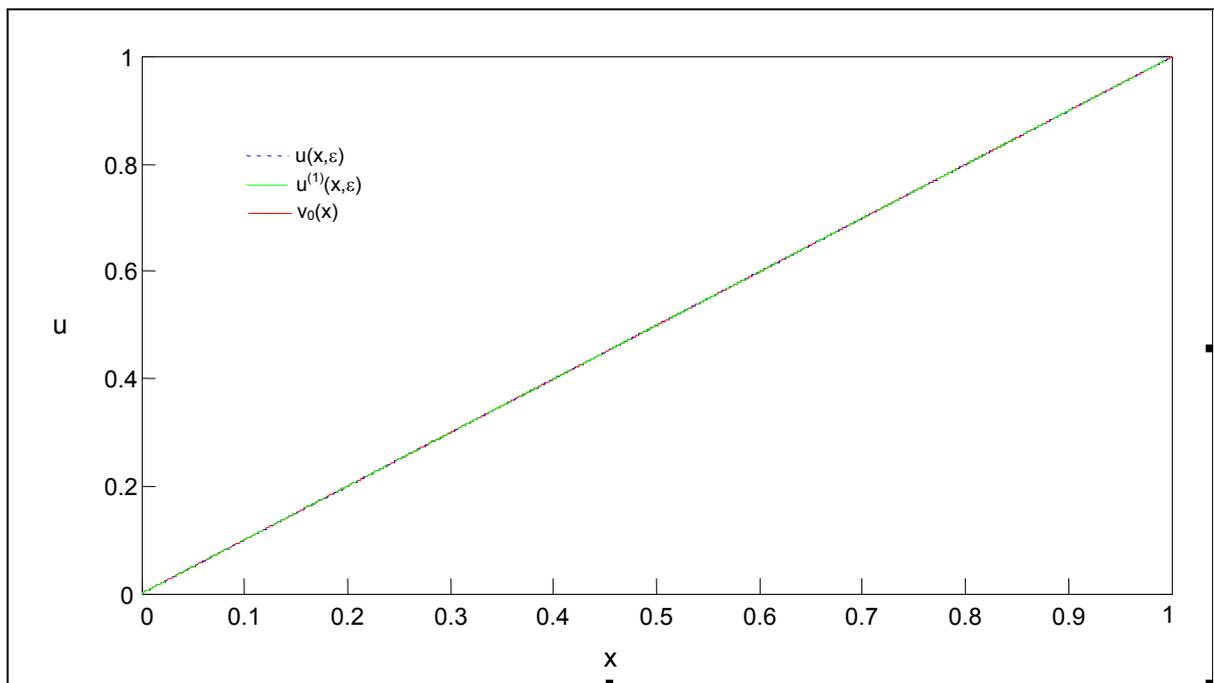


Figura 5 – Curvas as soluções $u(x, \varepsilon)$, $v_0(x)$ e $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ para $\varepsilon = 1/64$.

3.3 Análise de Convergência

Para determinar os erros de aproximação entre as soluções estudadas utilizou-se a norma L_2 definida como

$$\|e\|_{L_2(I)} = \left(\int_0^1 e^2 dx \right)^{1/2}, \tag{64}$$

onde e é o erro da aproximação entre duas soluções.

Para o problema aqui estudado foram definidos os seguintes erros de aproximação

$$e_1 = v_0(x) - u(x, \varepsilon), \quad (65)$$

$$e_2 = v_0(x) - u^{(1)}(x, \varepsilon), \quad (66)$$

$$e_3 = u(x, \varepsilon) - u^{(1)}(x, \varepsilon), \quad (67)$$

onde $v_0(x)$ é a solução do problema homogeneizado, $u(x, \varepsilon)$ é a solução do problema original e $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ é a solução aproximada obtida com o MHA. Estas soluções são dadas, respectivamente, pelas Eqs. (58), (55) e (63).

As curvas mostradas na Fig. 6 referem-se ao logaritmo na base dez dos erros, $\log_{10}(e)$, definidos nas Eqs. (65), (66) e (67), em relação ao logaritmo na base dez da relação $(1/\varepsilon)$, $\log_{10}(1/\varepsilon)$.

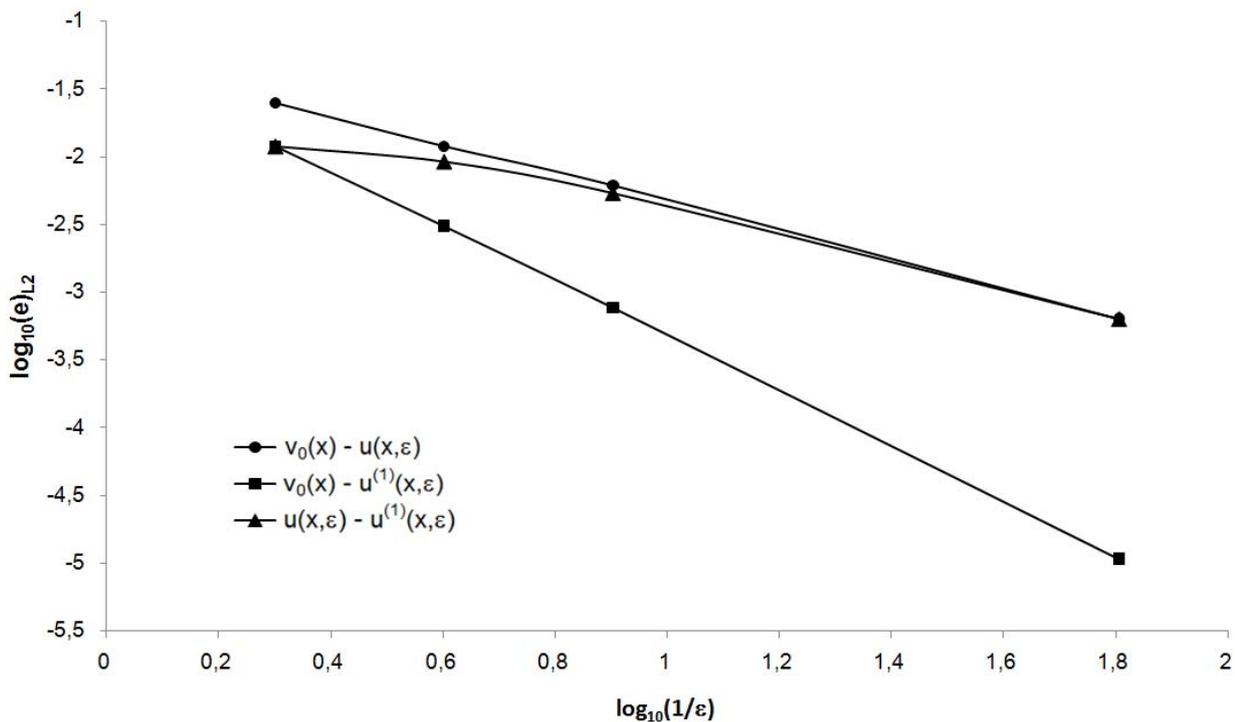


Figura 6 – Curvas de erros obtidos utilizando a norma L_2 .

Analisando a proximidade entre a solução do problema original e a solução do problema homogeneizado, Eq. (65), e a proximidade entre a solução aproximada obtida com o MHA e a solução do problema homogeneizado, Eq. (66), observa-se das curvas mostradas na Fig. 6 que em ambos os casos os erros obtidos diminuem à medida que o parâmetro pequeno ε diminui, indicando que ambas as soluções, original e aproximada, convergem para a solução do problema homogeneizado. Analisando a proximidade entre a solução aproximada obtida com o MHA e a solução do problema original, Eq. (67), observa-se da Fig. 6 que a solução $u^{(1)}(x, \varepsilon)$ apresenta menores erros do que a solução do problema homogeneizado para grandes valores do parâmetro ε e que converge para a solução do problema homogeneizado quando o parâmetro pequeno tende a zero. Este resultado confirma um resultado muito importante do MHA que assegura que a solução do problema original pode ser aproximada pela solução do problema homogeneizado quando o parâmetro pequeno ε tende a zero no problema original. Quando este não é o caso, podem-se utilizar mais termos da assintótica para construir uma solução aproximada para o problema.

4 CONCLUSÃO

Considerando a grande dificuldade de determinação das propriedades efetivas de um material compostos e a relevância do conhecimento destas propriedades para aplicações em projetos e desenvolvimento de novos materiais o MHA representa uma ferramenta robusta para a determinação destas propriedades, uma vez que, assegura a convergência da solução do problema original para a solução do problema homogeneizado conforme observado nos resultados obtidos neste trabalho.

5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas (EESC/USP) por propiciar as condições de infra-estrutura necessárias, ao Programa de Pós-Graduação Interunidades em Bioengenharia (PPGIB-EESC/FMRP/IQSC-USP) e aos seguintes órgãos que concederam suporte financeiro aos pesquisadores para o desenvolvimento deste trabalho: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM), Secretaria de Estado de Ciência e Tecnologia (SECT) e Governo do Estado do Amazonas. Os autores manifestam, também, seus mais sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Julian Bravo Castillero pela fundamentação teórica, esclarecimentos e sugestões. Professor Julián recebeu apoio financeiro da CAPES na modalidade Bolsista CAPES/Brasil do Programa Professor Visitante do Exterior – PVE, Ofício/CGI/CAPES N.º 0452-11/2010. Agradecimentos ao Dr. Leslie Darien Pérez Fernández pelas contribuições ao desenvolvimento deste trabalho.

6 REFERÊNCIAS

- ALLEN, D. H.; SEARCY, C. R.; SOARES, J. B. Multiscale techniques for modeling damage evolution in asphaltic pavements. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL AND EXPERIMENTAL ENGINEERING AND SCIENCES. Proceedings... Corfu, Grécia, 2003. CD-ROM.
- BAKHVALOV, N.; PANASENKO, G. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media – Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials**. Moscow: auka Publishers, 1989.
- BERTHELOT, C. F.; ALLEN, D. H. SOARES, C. R. Method for performing accelerated characterization of viscoelastic constitutive behavior of asphaltic concrete. **Journal of Materials in Civil Engineering**. v. 15, n. 5, p. 495-505, 2003.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; GUINOVART-DÍAZ, R.; MIJANGOS, O. V.; SABINA DE LIS, J. C. Effective Elastic Properties of Periodic Fibrous Composites. Limit Cases. Applications to porous and nonlinear materials. **Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences**, v. 13, p. 305-322, 2006.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; MECHKOUR, H.; OTERO, J.A.; CABANAS, J. H.; SIXTO, L. M.; GUINOVART-DÍAZ, R.; SABINA, F. J. Homogenization and Effective Properties of Periodic Thermomagnetoelastic composites. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v. 4, n. 5, p. 819-836, 2009.
- CABRILLAC, R.; MALOU, Z. Mechanical modelization of anisotropic porous materials with a homogenization method. Application to aerated concretes. **Construction and Building Materials**. v. 14, p. 25-33, 2000.

ELDEEN, S. A. S.; TANIGUCHI, T. **Modeling** of fiber reinforced concrete by the homogenization method. **Journal of the Faculty of Environmental Science and Technology**. Okayama University. v. 2, n. 1, p. 43-49, 2006.

FARAGE, M. C. R.; BEAUCOUR, A. L.; BARRA, L. P. S.; KE, Y.; SANÁBIO, D. F. S., FERREIRA, A. P. G. Multiscale modeling of the elastic moduli of lightweight aggregate concretes: numerical estimation and experimental validation. **REM: Revista Escola de Minas**, Ouro Preto, Vol. 62, No. 4, p. 455-462, 2009.

KALAMKAROV, A. L.; ANDRIANOV, I. V.; DANISHEVS'KYY, V. V. Asymptotic Homogenization of Composite Materials and Structures. **Applied Mechanics Reviews**, v. 62, n. 11, 2009.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, Propriedade e Materiais**. 3. Ed. São Paulo: IBRACON, 2008.

SOUZA, F. V. **Modelo multi-escala para análise estrutural de compósitos viscoelásticos suscetíveis ao dano**. 2005. 210p. Dissertação (Mestrado) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza/Brasil, 2005.

WEINBERGER, H. F. **A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods**. Waltham, Massachusetts-USA: Blaisdell Publishing Company, 1965.