

CÁLCULO DAS PROPRIEDADES ELETROMECAÑICAS EFETIVAS DE MATERIAIS ELASTO-PIEZOELÉTRICOS POROSOS

Uziel Paulo da Silva¹

Resumo

Neste artigo estudam-se as propriedades efetivas de um sólido constituído de um material elasto-piezoelétrico linear com simetria cristalina 622 e submetido a um estado de deformação antiplana. O sólido contém perfurações cilíndricas de secção transversal circular que estão periodicamente distribuídas segundo um arranjo quadrado. O estudo é baseado na solução de um problema local, o qual é obtido da aplicação do Método de Homogeneização Assintótica (MHA) juntamente com ferramentas matemáticas da teoria das funções de variáveis complexas. Aqui, propõem-se expandir a solução em uma série de potências com coeficientes indeterminados, os quais são determinados das soluções de sistemas de infinitas equações algébricas lineares. Mostra-se que as propriedades efetivas só dependem de um destes coeficientes. Truncando os sistemas infinitos a uma primeira ordem de aproximação, resultam fórmulas analíticas simples para a obtenção das propriedades efetivas, as quais dependem do arranjo geométrico dos furos e de um fator de acoplamento eletromecânico da matriz. Este estudo é de grande interesse para a engenharia civil, visto que materiais piezoelétricos são utilizados na construção de sensores e atuadores para a monitoração de integridade estrutural.

Palavras-chave: Método de homogeneização assintótica. Coeficientes efetivos. Elasticidade linear. Piezoeletricidade.

EVALUATION OF EFFECTIVE ELECTROMECHANICAL PROPERTIES OF POROUS ELASTO-PIEZOELECTRIC MATERIALS

Abstract

In this paper we study the effective properties of a solid made of a linearly elasto-piezoelectric material with crystalline symmetry 622 and submitted to a state of antiplane shear deformation. The solid contains cylindrical holes of circular cross section, which are periodically distributed according to a square packing geometry. The study is based on the solution of a local problem that is obtained from the application of the Asymptotic Homogenization Method (AHM) together with mathematical tools from the theory of functions of complex variables. Here, we propose to expand the solution in a power series containing undetermined coefficients, which are determined from the solutions of systems of infinite linearly algebraic equations. We show that the effective properties depend only upon one of these coefficients. Truncating the infinite systems to a first-order degree of approximation, we obtain simple analytical formulae for the effective coefficients, which depend on the packing geometry of the holes and on a electromechanical coupling factor of the matrix. This study is of great interest in civil engineering since piezoelectric materials are used in the manufacturing of sensors and actuators for the monitoring of structural integrity.

Keywords: Asymptotic Homogenization Method. Effective Coefficient. Linear elasticity. Piezoelectricity.

¹ Doutorando em Bioengenharia - Programa de Pós-Graduação Interunidades Bioengenharia - EESC/FMRP/IQSC - USP, uziel@sc.usp.br

1 INTRODUÇÃO

Materiais piezoelétricos sofrem polarização em resposta a uma deformação mecânica e exibem deformação em resposta à aplicação de um campo elétrico. O estudo deste tipo de comportamento é de grande interesse devido às suas aplicações. Este comportamento é explorado na construção de sensores e atuadores (TEBALDI et. al., 2006). Elementos piezoelétricos associados com circuitos elétricos passivos têm sido utilizados no controle passivo de vibrações em estruturas ópticas (FORWARD, 1979). Materiais piezoelétricos também são aplicados na localização e caracterização de falhas estruturais (TEBALDI et. al., 2006). Estes autores utilizam impedância elétrica para mostrar que é possível identificar falhas estruturais com exatidão. Utilizando a técnica de otimização por nuvem de partículas, eles também são capazes de quantificar a severidade da falha.

Em osteologia, é razoável assumir que o osso exibe um comportamento elástico-linear para pequenas deformações e pode ser modelado como um sólido heterogêneo, anisotrópico e elasto-piezoelétrico. As propriedades efetivas do osso têm sido estudadas nas últimas décadas; principalmente, devido às respostas obtidas com estimulação elétrica e mecânica em sua estrutura (Ver, por exemplo, Fukada & Yasuda (1957), Duarte (1983), Fyhrie et. al. (1989) e Silva et. al. (2001)). Duarte (1983) utiliza ultrassom pulsado para acelerar a consolidação de fraturas, pois as cargas elétricas necessárias ao reparo ósseo são produzidas por meio do efeito piezoelétrico. Devido à estimulação elétrica, a geração de cargas elétricas nas células altera os potenciais de membrana dos osteoblastos, permitindo bombeamento de íons e maior captação de nutrientes (BASSET, 1962). Estas características já são utilizadas em terapias ortopédicas e tratamentos de osteoporose.

Neste estudo consideram-se os materiais piezoelétricos porosos providos de estrutura periódica. A periodicidade assegura a existência de um elemento representativo, denominado célula periódica, o qual possui todas as propriedades físicas e geométricas do compósito. Aqui, meios heterogêneos providos de estrutura periódica são modelados matematicamente por sistemas de equações diferenciais com coeficientes periódicos e rapidamente oscilantes. De um modo geral, soluções analíticas são obtidas em situações relativamente simples, as quais envolvem meios com formas geométricas elementares, tais como paralelepípedos, cilindros circulares retos e esferas. Na maioria dos problemas de engenharia, é necessário recorrer a métodos que forneçam soluções aproximadas, tais como os métodos numéricos e os métodos de homogeneização. Métodos numéricos versáteis, tais como o Método dos Elementos Finitos (MEF), fornecem soluções aproximadas de um problema de valor de contorno (PVC) utilizando discretizações do domínio do PVC. Discretizações com malhas refinadas fornecem soluções numéricas mais próximas da solução exata do problema. No entanto, a aplicação de métodos numéricos como o MEF no estudo de problemas governados por equações diferenciais com coeficientes periódicos e rapidamente oscilantes requer malhas extremamente refinadas, tornando o método impraticável.

Diferentes métodos de homogeneização têm sido desenvolvidos para prever as constantes piezoelétricas e elásticas de materiais compostos por dois, ou, mais constituintes. Dentre estes, o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) permite encontrar com grande precisão as propriedades efetivas do material composto a partir das propriedades físicas e geométricas dos seus constituintes (BENSOUSSAN et. al., 1978); (SANCHEZ-PALENCIA, 1980); (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Este método consiste em buscar a solução de um PVC original governado por equações diferenciais com coeficientes periódicos e rapidamente oscilantes na forma de uma série de potências de um parâmetro geométrico escalar ε , o qual é a razão entre comprimentos característicos da estrutura global e local de um sólido feito deste material composto. Os coeficientes da série dependem de uma variável x que representa a estrutura global do sólido composto e de uma variável $y = x/\varepsilon$ que representa a micro-estrutura deste sólido. Por meio deste método, o PVC original é transformado em um problema homogeneizado com coeficientes constantes. O MHA garante que a solução do PVC original com coeficientes periódicos e rapidamente oscilantes converge para a solução do problema homogeneizado quando ε tende a zero (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

O MHA tem sido aplicado nas mais diversas áreas da engenharia. Bravo-Castillero et al. (1989) utilizam o MHA para determinar as propriedades efetivas elásticas, piezoelétricas e dielétricas de um composto piezoelétrico laminado dotado de uma estrutura periódica. Estes autores determinam as expressões analíticas para cada propriedade efetiva. Bravo-Castillero et al. (2009) aplicam o MHA na determinação de fórmulas analíticas para as propriedades efetivas de compósitos piezoelétricos elástico-lineares com uma estrutura periódica e matriz transversalmente isotrópica de classe cristalina 6mm. Além disso, eles aplicam os resultados obtidos no estudo de estruturas ósseas e obtêm resultados satisfatórios quando comparados com dados obtidos na literatura. Kalamkarov et al. (2009) revisam o MHA e estudam as soluções analíticas para PVC's com células unitárias em compósitos laminados reforçados com fibras.

López-López et al. (2005) estudam um compósito piezoelétrico contendo fibras circulares cilíndricas periodicamente distribuídas em uma matriz homogênea. As propriedades eletromecânicas, piezoelétricas e elásticas dos materiais constituintes do compósito pertencem à classe cristalina 622. Estes autores estudam as propriedades efetivas antiplanas do compósito utilizando o MHA e técnicas de funções de variáveis complexas. São obtidas fórmulas para as propriedades efetivas, as quais dependem somente de um coeficiente indeterminado. Eles mostram que as fórmulas finais para as propriedades efetivas dependem explicitamente das propriedades das fases, do raio da fibra e somas associadas ao arranjo quadrado das células periódicas. Além disso, verificam os resultados obtidos analiticamente por meio de exemplos numéricos e dados obtidos na literatura.

Diferentemente de López-López et al. (2005), neste trabalho estudam-se compósitos piezoelétricos porosos com perfurações cilíndricas, de secção transversal circular, periodicamente distribuídas segundo um arranjo quadrado. Modelam-se matematicamente os compósitos utilizando problemas de "fronteira livre", e, por meio do MHA, obtêm-se fórmulas analíticas bem simples para as propriedades efetivas piezoelétricas e elásticas, as quais dependem somente da secção transversal do furo, f , e de um fator de acoplamento eletromecânico. Este fator é dado em termos das constantes piezoelétricas, dielétricas e elásticas do material e fornece a eficiência do efeito piezoelétrico em um material no processo de transdução, ou, conversão de energia mecânica em elétrica e vice-versa (IRE, 1958).

2 MODELAGEM

Modela-se um sólido poroso composto de furos cilíndricos circulares vazios distribuídos periodicamente em uma matriz transversalmente isotrópica de classe 622, conforme ilustrado na Fig. 1. Os materiais desta classe possuem sistema de cristalização hexagonal. O sistema de cristalização é o conjunto de simetrias de rotação e reflexão que são permitidas ao manter fixo um ponto da malha. A estrutura cristalina de um sólido é a designação dada ao conjunto de propriedades que resultam da forma como os átomos ou moléculas que o constituem estão espacialmente ordenados. As classes de cristal piezoelétricas são (NYE, 1969): triclínica ($1, \bar{1}$), monoclínica ($2, m, 2/m$), ortorrômbica ($222, mm2, mmm$), tetragonal ($4, \bar{4}, 4/m, 422, 4mm, \bar{4}/2m, \bar{4}/mmm$), trigonal ($3, \bar{3}, 32, 3m, \bar{3}m$), hexagonal ($6, \bar{6}, 6/m, 622, 6mm, \bar{6}m2, 6/mmm$), cúbica ($23, m\bar{3}, 432, \bar{4}3m, m\bar{3}m$).

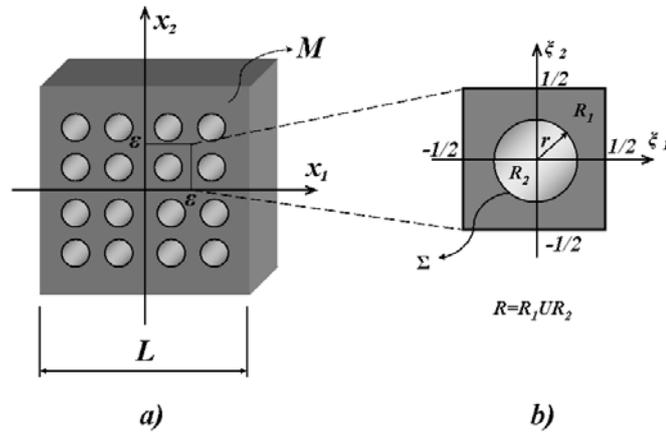


Figura 1 – Secção transversal de um sólido piezoelétrico poroso. M representa a matriz. As seções circulares representam os poros.

A região R na Fig. 1, chamada de célula periódica, é um quadrado contendo a região R_1 da matriz e a região R_2 de um furo circular, centrado na interseção das diagonais do quadrado, de raio r e contorno Σ . Considera-se uma distribuição periódica destas células, R , na região M . A periodicidade das células é dada sem superposição dos furos.

2.1 Equações Básicas

Em elasticidade linear, as componentes do tensor deformação, ε_{ij} , relacionam-se com as componentes do vetor deslocamento, u_i , por meio de

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

As componentes do campo elétrico, E_k , são expressas pelo gradiente do potencial elétrico, φ , como segue

$$E_k = -\varphi_{,k}, \quad (1.2)$$

onde $\varphi_{,k} \triangleq \frac{\partial \varphi}{\partial y_k}$.

Nas relações constitutivas de materiais piezoelétricos, as componentes do tensor tensão, T_{ij} , e do vetor deslocamento elétrico, associado com cargas livres, D_i , estão relacionadas com as componentes do tensor deformação, ε_{kl} , e do campo elétrico, E_k , respectivamente. As propriedades do material são dadas pelas componentes dos tensores elástico, C_{ijkl} , piezoelétrico, e_{kij} , e de permissividade elétrica, κ_{ik} .

As relações constitutivas de um material piezoelétrico linear são dadas por (IKEDA, 1990)

$$\begin{cases} T_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k, \\ D_i = e_{ikl}\varepsilon_{kl} + \kappa_{ik}E_k. \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

Em (1.3) adota-se a convenção usual de soma sobre os índices latinos repetidos. Os coeficientes materiais em (1.3) satisfazem condições clássicas de simetria e positividade dadas, respectivamente, por

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \quad \kappa_{ij} = \kappa_{ji}, \quad (1.4)$$

$$\exists C > 0 : C_{ijkl}a_{ij}a_{kl} \geq Ca_{ij}a_{ij}, \quad \forall a_{ij} \in E_s^3, \quad \exists C > 0 : \kappa_{ij}\eta_i\eta_j \geq C\eta_j\eta_j, \quad \forall \eta \in R^3, \quad (1.5)$$

onde $i, j, k, l = 1, 2, 3$, e E_s^3 é o conjunto das matrizes simétricas de ordem três.

As equações de equilíbrio da mecânica na ausência de força de corpo e a Lei de Gauss da eletrostática na ausência de cargas livres são dadas por

$$\begin{cases} T_{ij,j} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ D_{i,i} = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Substituindo (1.1) e (1.2) em (1.3) e, em seguida, substituindo as expressões resultantes em (1.6), obtém-se

$$\begin{cases} (C_{ijkl}u_{k,l} + e_{kij}\varphi_{,k}),_{j} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ (e_{ikl}u_{k,l} - \kappa_{ik}\varphi_{,k}),_{i} = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

As expressões acima fornecem um sistema de equações diferenciais parciais para a determinação das três componentes de deslocamento $u_k, k = 1, 2, 3$, e do potencial φ .

Na Fig. 2 apresenta-se esquematicamente a disposição das componentes dos tensores que representam as propriedades constitutivas de materiais piezoelétricos com estrutura cristalina de classe 622. As bolas pretas são as componentes não nulas e as bolas pretas e brancas ligadas por um traço são componentes com módulos iguais e sinais contrários.

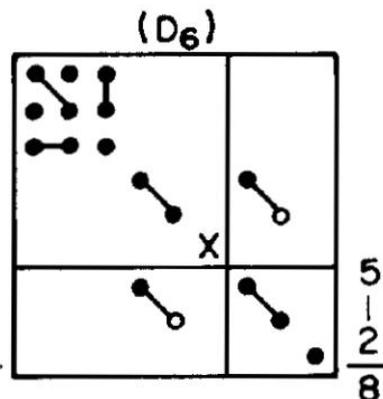


Figura 2 – Representação matricial das propriedades de um material piezoelétrico da classe 622 (NYE, 1969).

2.2 Homogeneização

Considera-se que os coeficientes C_{ijkl} , e_{kij} , κ_{ik} são funções R-periódicas. Realiza-se uma análise bidimensional sobre a célula periódica R utilizando a coordenada global, $x = (x_1, x_2)$, a coordenada local, $y = (\xi_1, \xi_2)$, onde $y = \frac{x}{\varepsilon}$, e $\varepsilon = \frac{l}{L} \ll 1$.

Busca-se uma solução para o problema (1.7) na forma de uma expansão assintótica em duas escalas (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989):

$$\begin{aligned} u_k(x) &= \varepsilon^0 u_k^0(x, y) + \varepsilon^1 u_k^1(x, y) + \varepsilon^2 u_k^2(x, y) + \dots \\ \varphi(x) &= \varepsilon^0 \varphi^0(x, y) + \varepsilon^1 \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y) + \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

Substituindo as equações (1.8) em (1.7) e desenvolvendo estas equações, obtêm-se uma sequência recorrente de problemas de valor de contorno locais, definidos sobre a célula periódica R , a partir dos quais se obtêm equações homogeneizadas. Os coeficientes em (1.7) são periódicos e rapidamente oscilantes. Aplicando o MHA obtêm equações homogeneizadas, no qual os coeficientes são transformados em coeficientes efetivos C_{ijpq} constantes. Porém, para determinar estes coeficientes efetivos é necessário resolver os problemas locais, também conhecidos como problemas ${}_{pq}L$, os quais são definidos a seguir. A metodologia utilizada para a obtenção destes problemas locais é análoga à metodologia apresentada em Prado et al. (2011) no estudo de compósitos elásticos.

2.3 Definição dos Problemas Locais ou Problemas de “Fronteira livre” sobre a Célula Periódica

Aplicando o MHA descrito detalhadamente em (SANCHEZ-PALENCIA, 1980); (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989), surgem dois conjuntos de problemas de valor de contorno locais sobre a célula periódica, denotados por ${}_{pq}L$ e ${}_pL$. Estes problemas são conhecidos por *problemas de “fronteira livre” sobre a célula periódica*.

Na definição dos problemas locais, índices latinos variam de um a três e índices gregos de um a dois. Define-se o *operador média* sobre a célula periódica por

$$\langle F \rangle = \frac{1}{\|X\|} \int_X F dS, \quad (1.9)$$

onde $\|X\|$ é a área da célula periódica.

Os problemas locais ${}_{pq}L$ consistem em encontrar as componentes dos vetores deslocamento R-periódicos ${}_{pq}M(y)$ e dos potenciais R-periódicos ${}_{pq}N(y)$ que satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{cases} {}_{pq}T_{i\delta, \delta} = 0, \\ {}_{pq}D_{i\delta} = 0, \end{cases} \text{ em } R, \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} {}_{pq}T_{i\delta}{}^n{}_\delta = -C_{i\delta}{}_{pq}{}^n{}_\delta, \\ {}_{pq}D_{\delta}{}^n{}_\delta = -e_{\delta}{}_{pq}{}^n{}_\delta, \end{cases} \text{ sobre } \Sigma, \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} \langle pq M_i \rangle = 0, \\ \langle pq N \rangle = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

onde n_δ são as componentes do vetor unitário normal a Σ e as relações constitutivas para os problemas locais L_{pq} são dadas por

$$\begin{cases} pq T_{i\delta} = C_{i\delta k\lambda} pq M_{k,\lambda} + e_{\lambda i\delta} pq N_{,\lambda}, \\ pq D_\delta = -e_{\delta k\lambda} pq M_{k,\lambda} - \kappa_{\delta\lambda} pq N_{,\lambda}. \end{cases} \quad (1.13)$$

2.4 Desenvolvimento das Equações de Contorno sobre a Célula Periódica

Lembrando da Seção 2.1 que, devido à simetria dos tensores que representam as propriedades constitutivas de materiais piezoelétricos de estrutura de classe cristalina, algumas componentes destes tensores são nulas. Substituindo (1.13) em (1.10) e tomando $i = 1$, obtém-se

$$(C_{1\delta k\lambda} pq M_{k,\lambda} + e_{\lambda 1\delta} pq N_{,\lambda}),_\delta = 0. \quad (1.14)$$

Como

$$e_{\lambda 11} = e_{\lambda 12} = 0, \quad (1.15)$$

devido à simetria do tensor piezoelétrico, obtém-se da Eq. (1.14) que

$$(C_{11k1} pq M_{k,1} + C_{11k2} pq M_{k,2}),_1 + (C_{12k1} pq M_{k,1} + C_{11k2} pq M_{k,2}),_2 = 0. \quad (1.16)$$

Como ${}_{pq}M_k$ é suave, (1.16) pode ser reescrito como

$$C_{11k1} pq M_{k,11} + C_{11k2} pq M_{k,21} + C_{12k1} pq M_{k,12} + C_{12k2} pq M_{k,22} = 0. \quad (1.17)$$

Devido à classe de simetria do sólido, os coeficientes abaixo são nulos,

$$C_{1121} = C_{1131} = C_{1112} = C_{1132} = C_{1211} = C_{1231} = C_{1222} = C_{1232} = 0. \quad (1.18)$$

Utilizando-se as expressões da Eq. (1.18), pode-se reescrever a equação (1.17) na forma

$$C_{1111} pq M_{1,11} + C_{1122} pq M_{2,11} + C_{1221} pq M_{2,12} + C_{1212} pq M_{1,22} = 0. \quad (1.19)$$

Além disso, o coeficiente C_{1212} , representado por x na figura Fig. 2, é dado por

$$C_{1212} = \frac{C_{1111} - C_{1122}}{2}. \quad (1.20)$$

Substituindo (1.20) em (1.19) e desenvolvendo as operações, obtém-se

$$C_{1212} \Delta pq M_1 + (C_{1212} + C_{1122}) pq M_{\theta,\theta 1} = 0. \quad (1.21)$$

Substituindo agora (1.13) em (1.10) e tomando $i = 2$ e $i = 3$, obtém-se, respectivamente,

$$(C_{2\delta k\lambda} pq M_{k,\lambda} + e_{\lambda 2\delta} pq N_{,\lambda}),_\delta = 0, \quad (1.22)$$

$$(C_{3\delta k\lambda} pq M_{k,\lambda} + e_{\lambda 3\delta} pq N_{,\lambda}),_\delta = 0. \quad (1.23)$$

Desenvolvendo (1.22) e (1.23) de forma análoga ao desenvolvimento de (1.14) e considerando a simetria dos tensores da classe 622, obtêm-se, respectivamente, as seguintes equações

$$C_{1212}\Delta_{pq}M_2 + (C_{1212} + C_{1122})_{pq}M_{\theta,\theta 2} = 0, \tag{1.24}$$

$$C_{1313}\Delta_{pq}M_3 = 0. \tag{1.25}$$

Nas equações (1.21), (1.24) e (1.25), o símbolo Δ é definido por $\Delta \triangleq \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2}$ e representa o operador Laplaciano. Substituindo a segunda equação de (1.10) na segunda equação de (1.13), obtêm-se

$$(e_{\delta k \lambda pq}M_{k,\lambda} - \kappa_{\delta \lambda pq}N_{,\lambda}),_{\delta} = 0. \tag{1.26}$$

Considerando a classe de simetria, na qual todas as componentes dielétricas são nulas exceto κ_{11} , κ_{22} , κ_{33} , e, desenvolvendo (1.27), obtêm-se a equação

$$\kappa_{11}\Delta_{pq}N = 0 \tag{1.27}$$

Utilizando (1.21), (1.24), (1.25) e (1.27), constrói-se a Tabela 1 para os problemas ${}_{pq}L$. Esta tabela contém as equações de contorno para os problemas definidos na célula periódica.

Tabela 1 – Equações para os Problemas Locais ${}_{pq}L$

$i = 1$	$C_{1212}\Delta_{pq}M_1 + (C_{1212} + C_{1122})_{pq}M_{\theta,\theta 1} = 0$
$i = 2$	$C_{1212}\Delta_{pq}M_2 + (C_{1212} + C_{1122})_{pq}M_{\theta,\theta 2} = 0$
$i = 3$	$C_{1313}\Delta_{pq}M_3 = 0$
	$\kappa_{11}\Delta_{pq}N = 0$

Utilizando as equações apresentadas na Tabela (1) para cada problema ${}_{pq}L$ e as condições de contorno em (1.11) obtêm-se a Tabela 2. Esta tabela apresenta para cada problema local ${}_{pq}L$ a sua condição de contorno correspondente. Observa-se que os problemas ${}_{11}L$, ${}_{22}L$, ${}_{33}L$ e ${}_{12}L$ identificam-se com os problemas de deformações planas da teoria da elasticidade linear para meios isotrópicos e homogêneos. Enquanto que os problemas ${}_{13}L$ e ${}_{23}L$ são problemas antiplanos.

Tabela 2 - Condições de Contorno para os Problemas Locais ${}_{pq}L$

		${}_{11}L$	${}_{22}L$	${}_{33}L$	${}_{23}L$	${}_{13}L$	${}_{12}L$
$i = 1$	$-C_{1\delta pq}n_{\delta}$	$-C_{1111}n_1$	$-C_{1122}n_1$	$-C_{1133}n_1$	0	0	$-C_{1212}n_1$
$i = 2$	$-C_{2\delta pq}n_{\delta}$	$-C_{2211}n_2$	$-C_{2222}n_2$	$-C_{2233}n_2$	0	0	$-C_{2112}n_1$
$i = 3$	$-C_{3\delta pq}n_{\delta}$	0	0	0	$-C_{3223}n_2$	$-C_{3113}n_1$	0
	$-e_{\delta pq}n_{\delta}$	0	0	0	$-e_{123}n_1$	$-e_{213}n_2$	0

Da Tabela (2) constrói-se a Tabela (3). O problema ${}_{13}L$ é o problema de interesse neste trabalho.

Tabela 3 – Vetores deslocamento R- periódicos ${}_{pq}M_k$

	${}_{11}L$	${}_{22}L$	${}_{33}L$	${}_{23}L$	${}_{13}L$	${}_{12}L$
$i = 1$	${}_{11}M_1 \neq 0$	${}_{22}M_1 \neq 0$	${}_{33}M_1 \neq 0$	${}_{23}M_1 = 0$	${}_{13}M_1 = 0$	${}_{12}M_1 \neq 0$
$i = 2$	${}_{11}M_2 \neq 0$	${}_{22}M_2 \neq 0$	${}_{33}M_2 \neq 0$	${}_{23}M_2 = 0$	${}_{13}M_2 = 0$	${}_{12}M_2 \neq 0$
$i = 3$	${}_{11}M_3 = 0$	${}_{22}M_3 = 0$	${}_{33}M_3 = 0$	${}_{23}M_3 \neq 0$	${}_{13}M_3 \neq 0$	${}_{12}M_3 = 0$
	${}_{11}N = 0$	${}_{22}N = 0$	${}_{33}N = 0$	${}_{23}N \neq 0$	${}_{13}N \neq 0$	${}_{12}N = 0$

Os problemas locais ${}_pL$ consistem em encontrar as componentes dos vetores deslocamento R- periódicos ${}_pM$ e dos potenciais R-periódicos ${}_pN$ que satisfaçam as seguintes condições:

$$\begin{cases} {}_pT_{i\delta,\delta} = 0, \\ {}_pD_{i\delta} = 0, \end{cases} \text{ em } R, \tag{1.28}$$

$$\begin{cases} {}_pT_{i\delta^n\delta} = -e_{pi\delta^n\delta}, \\ {}_pD_{\delta^n\delta} = -\kappa_{\delta}p^n_{\delta}, \end{cases} \text{ sobre } \Sigma, \tag{1.29}$$

$$\begin{cases} \langle {}_pM_i \rangle = 0, \\ \langle {}_pN \rangle = 0, \end{cases} \tag{1.30}$$

onde as relações constitutivas para os problemas locais ${}_pL$ são dadas por

$$\begin{cases} {}_pT_{i\delta} = C_{i\delta k\lambda}p^M_{k,\lambda} + e_{\lambda i\delta}p^N_{,\lambda}, \\ {}_pD_{\delta} = -e_{\delta k\lambda}p^M_{k,\lambda} - \kappa_{\delta\lambda}p^N_{,\lambda}. \end{cases} \tag{1.31}$$

O processo de obtenção das equações de contorno para os problemas locais ${}_pL$ é análogo ao processo utilizado na obtenção das equações de contorno dos problemas ${}_{pq}L$. Por meio deste processo, obtém-se a Tabela 4

Tabela 4 – Equações para os problemas locais ${}_pL$

$i = 1$	\implies	$C_{1212}\Delta_p M_1 + (C_{1212} + C_{1122})_p M_{\theta,\theta 1} = 0$
$i = 2$	\implies	$C_{1212}\Delta_p M_2 + (C_{1212} + C_{1122})_p M_{\theta,\theta 2} = 0$
$i = 3$	\implies	$C_{1313}\Delta_p M_3 = 0$
		$-\kappa_{11}\Delta_p N = 0$

As tabelas (5) e (6) contêm, respectivamente, as condições de contorno para os problemas ${}_pL$ e os vetores deslocamento M e N.

Tabela 5 – Condições de Contorno para os Problemas Locais ${}_pL$

		${}_1L$	${}_2L$
$i = 1$	$-e_{pi\delta}n_\delta$	0	0
$i = 2$	$-e_{pi\delta}n_\delta$	0	0
$i = 3$	$-e_{pi\delta}n_\delta$	$-e_{132}n_2$	$-e_{231}n_1$
	$\kappa_{\delta p}n_\delta$	$\kappa_{11}n_1$	$\kappa_{22}n_2$

Observe que, de modo análogo aos problemas ${}_{13}L$ e ${}_{23}L$, os problemas ${}_1L$ e ${}_2L$ se identificam com problemas planos da elasticidade linear clássica.

Tabela 6 – Vetores deslocamento R- periódicos ${}_pM_k$

	${}_1L$	${}_2L$
$i = 1$	${}_1M_1 = 0$	${}_2M_1 = 0$
$i = 2$	${}_1M_2 = 0$	${}_2M_2 = 0$
$i = 3$	${}_1M_3 \neq 0$	${}_2M_3 \neq 0$
	${}_1N \neq 0$	${}_2N \neq 0$

2.5 O Problema Local ${}_{13}L$

De acordo com (1.25)-(1.27) e com as tabelas (1)-(3), define-se o problema ${}_{13}L$ como segue

$$\begin{cases} \Delta_{13}M_3 = 0, \\ \Delta_{13}N = 0. \end{cases} \text{ em } R \tag{1.32}$$

$$\begin{cases} {}_{13}T_{3\delta}n_\delta = -C_{1313}n_1, \\ {}_{13}D_\delta n_\delta = -e_{213}n_2. \end{cases} \text{ sobre } \Sigma \tag{1.33}$$

$$\begin{cases} \langle {}_{13}M_3 \rangle = 0, \\ \langle {}_{13}N \rangle = 0, \end{cases} \quad (1.34)$$

onde δ toma os valores 1 e 2 na somatória acima.

Desenvolvendo as equações (1.32) e aplicando as condições de contorno (1.33), obtêm-se as equações

$$\begin{cases} \left(C_{131313}M_{3,1} - e_{12313}N_{,2} \right) n_1 + \left(C_{131313}M_{3,2} - e_{12313}N_{,1} \right) n_2 = -C_{1313}n_1, \\ \left(-e_{12313}M_{3,1} - \kappa_{1113}N_{,2} \right) n_2 + \left(e_{12313}M_{3,2} - \kappa_{1113}N_{,1} \right) n_1 = e_{123}n_2, \end{cases} \quad (1.35)$$

onde $n = (n_1, n_2)$ e utilizam-se, a seguir, a simbologia usual para as constantes elásticas, $p = C_{1313} = C_{2323}$, os coeficientes piezoelétricos, $s = e_{123} = -e_{213}$, e os coeficientes dielétricos, $t = \kappa_{11} = \kappa_{22}$, (BRAVO-CASTILLERO, 2001).

2.6 A solução do Problema Local ${}_{13}L$

Nesta subseção propõe-se uma solução para o problema local ${}_{13}L$ definido em (1.32)-(1.34), aplicando elementos da teoria de funções de variáveis complexas, isto é, funções para as quais as incógnitas são elementos pertencentes ao conjunto dos números complexos. Isto é possível porque existe uma relação biunívoca entre o plano, visto que a seção transversal é bidimensional, e o conjunto dos números complexos.

Sejam $z = \xi_1 + i\xi_2$ um número complexo e $F(z) = U + iW$ uma função complexa. Denominam-se $U = \text{Re}\{F(z)\}$ e $W = \text{Im}\{F(z)\}$ por parte real e imaginária da função $F(z)$, respectivamente. Propõe-se uma solução para o problema (1.32)-(1.34) da forma

$${}_{13}M_k(z) = \text{Re} \left\{ a_1 \left[\zeta(z) - \pi z \right] + \sum_{k=3}^{\infty} {}^0 a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (1.36)$$

$${}_{13}N(z) = \text{Im} \left\{ b_1 \left[\zeta(z) - \pi z \right] + \sum_{k=3}^{\infty} {}^0 b_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (1.37)$$

onde $\zeta(z)$ e $\zeta^{(k)}(z)$ são as funções Zeta de Weierstrass (MARKUSHEVICH, 1970), e o zero supra escrito indica que a soma é realizada somente para os termos ímpares. Os coeficientes a_k em (1.36) e b_k em (1.37) são constantes reais. Para obtê-las, é necessário desenvolver ${}_{13}M_k(z)$ e ${}_{13}N(z)$ em séries de Laurent em torno da origem

As funções definidas por (1.36) e (1.37) são funções analíticas em \mathbb{R} . Deste modo, as suas partes reais e imaginárias são funções harmônicas, ou seja, elas satisfazem as equações de Laplace,

definidas na célula periódica para o problema local ${}_{13}L$, definido em (1.32)-(1.34) (MARKUSHEVICH, 1970).

Observe que as funções ${}_{13}M_k(z)$ e ${}_{13}N(z)$ são duplamente periódicas com períodos $\omega_1=1$ e $\omega_2=i$, as quais estão em concordância com a exigência geométrica de encontrar as soluções na classe de funções com dupla periodicidade.

Mostra-se que a série

$$S_{k+l} = \sum_{m,n} / \frac{1}{(m+in)^{k+l}} \quad (1.38)$$

é real e que se anula quando $k+l$ não é da forma $4t$ para $t=1,2,3$. O apóstrofo, “'”, na expressão (1.39) indica que a soma dupla realiza-se sobre todos os números inteiros exceto para $m=n=0$. Para $k+l \geq 2$, esta série é convergente. Para maiores detalhes, ver Markushevich (1970).

Assim, ao desenvolver a função ${}_{13}M_k(z)$ e ${}_{13}N(z)$ em séries de Laurent em torno do ponto $z=0$, obtêm-se:

$${}_{13}M_k(z) = \operatorname{Re} \left\{ -a_1 \pi z + \sum_{l=1}^{\infty} {}^0 a_l z^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^0 a_k \sum_{l=1}^{\infty} {}^0 \eta_{kl} z^{-l} \right\}, \quad (1.39)$$

$${}_{13}N(z) = \operatorname{Im} \left\{ -b_1 \pi z + \sum_{l=1}^{\infty} {}^0 b_l z^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^0 b_k \sum_{l=1}^{\infty} {}^0 \eta_{kl} z^{-l} \right\}, \quad (1.40)$$

onde $\eta_{rs} \neq \eta_{sr}$ e é definido por

$$\eta_{rs} = -C_{r+s-1}^s S_{r+s}, \quad (1.41)$$

com

$$C_r^s = \frac{r!}{s!(r-s)!}. \quad (1.42)$$

Desenvolvendo as equações do contorno (1.35) para $n=(n_1, n_2)=(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ e utilizando os conceitos da teoria de variáveis complexas, obtêm-se $d\zeta_1 = -r \operatorname{sen} \theta d\theta$, $d\zeta_2 = \cos \theta d\theta$. Aplicando condições de Cauchy—Riemann, obtêm-se sistemas infinitos em termos de a_k e b_k e η_{kl} .

Os coeficientes a_1 e b_1 , são obtidos por meio da resolução de um sistema infinito, truncando este sistema para uma primeira aproximação. Este sistema é obtido substituindo (1.39)-(1.40) em (1.32), aplicando as condições de contorno dadas em (1.33). As expressões obtidas para a_1 e b_1 são

$$a_1 = \frac{(pt - s^2)r^2}{pt + s^2}, \quad (1.43)$$

$$b_1 = \frac{-2(ps)r^2}{pt + s^2}. \quad (1.44)$$

3 COEFICIENTES EFETIVOS

As constantes elásticas, piezoelétricas e dielétricas homogeneizadas, isto é, as constantes efetivas, são calculadas por (BRAVO-CASTILLERO et. al., 2009)

$$\begin{cases} \hat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijpq} + C_{ijkl} p q M_{k,l} + e_{kij} p q N_{,k} \right\rangle, \\ \hat{e}_{ipq} = \left\langle e_{ipq} + e_{ikl} p q M_{k,l} - \kappa_{ik} p q N_{,k} \right\rangle, \end{cases} \quad (1.45)$$

onde ${}_{pq}M_{k,\lambda}$ e ${}_{pq}N_{k,\lambda}$ são soluções dos problemas locais, ${}_{pq}L$, definidos por (1.10)-(1.12), e por

$$\begin{cases} \hat{e}_{pij} = \left\langle e_{pij} + C_{ijkl} p M_{k,l} + e_{kij} p N_{,k} \right\rangle, \\ \hat{\kappa}_{ip} = \left\langle \kappa_{ip} + e_{ikl} p M_{k,l} - \kappa_{ik} p N_{,k} \right\rangle, \end{cases} \quad (1.46)$$

onde ${}_pM_{k,l}$ e ${}_pN_{,k}$ são soluções dos problemas locais ${}_pL$, definidos por (1.28)-(1.30). O chapéu sobrescrito refere-se à propriedade efetiva.

Substituindo (1.39) e (1.40) em (1.45) e (1.46), e desenvolvendo as expressões resultantes, obtêm-se

$$\hat{p} = \langle p \rangle + \langle pM_{,1} - sN_{,2} \rangle, \quad (1.47)$$

$$\hat{s} = \langle s \rangle + \langle sM_{,1} + tN_{,2} \rangle. \quad (1.48)$$

Observa-se de (1.9) que

$$\langle p \rangle = p(1 - \pi r^2). \quad (1.49)$$

Aplicando o Teorema de Green em (1.47) e (1.48), obtêm-se

$$\langle pM_{,1} - sN_{,2} \rangle = -\oint_{\Sigma} sNd\xi_1 - pMd\xi_2. \quad (1.50)$$

Integrando esta expressão, obtêm-se o coeficiente efetivo \hat{p} , e, de modo análogo, \hat{s} , os quais são dados por

$$\hat{p} = p(1 - 2\pi a_1), \quad (1.51)$$

$$\hat{s} = s + 2\pi t b_1. \quad (1.52)$$

Substituindo (1.43) e (1.44) em (1.51) e (1.52), respectivamente, obtêm-se

$$\left\{ \frac{\hat{p}}{p} = 1 - 2f \left(\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right), \right. \quad (1.53)$$

$$\left. \frac{\hat{s}}{s} = 1 - 4f \left(\frac{1}{1 + \sigma} \right), \right. \quad (1.54)$$

onde $f = \pi r^2$ e $\sigma = \frac{s^2}{pt}$.

A constante σ é um fator de acoplamento eletromecânico. Este fator é um indicador da eficácia com que um material piezoelétrico converte energia elétrica em energia mecânica, ou, converte a energia mecânica em energia elétrica (Davi, 1998).

4 CONCLUSÃO E DISCUSSÃO

As propriedades eletromecânicas efetivas, elásticas e piezoelétricas, de materiais piezoelétricos homogêneos de simetria cristalina 622, resultantes da resolução do problema local antiplano, $_{13}L$, derivado da aplicação do MHA por meio da utilização de elementos da teoria das funções de variáveis complexas, são obtidas. Aqui, propõem-se para o problema local soluções complexas com coeficientes indeterminados, os quais são soluções de sistemas de infinitas equações algébricas lineares. Mostra-se que as propriedades efetivas só dependem de um destes coeficientes e, finalmente, truncando o sistema infinito a uma primeira ordem de aproximação, resultam fórmulas analíticas simples para ambas as propriedades efetivas. Estas fórmulas dependem do arranjo geométrico dos furos e de um fator de acoplamento eletromecânico da matriz. De (1.53) e (1.54), obtém-se a relação

$$\frac{\hat{p} - p}{\hat{s} - s} = \frac{p}{2s} (1 - \sigma). \quad (1.55)$$

Agora, precisa-se verificar se esta relação é preservada para aproximações mais gerais, por exemplo, $l=3$ e $k=5,9,13,\dots$. Além disto, precisa-se verificar as relações para aproximações mais gerais para o fator de acoplamento eletromecânico, σ , e comparar os resultados numéricos obtidos com dados encontrados na literatura.

5 AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Departamento de Estrutura da EESC-USP, por propiciar as condições de infra-estrutura necessárias. Agradecimentos aos professores Adair R. Aguiar, Ph.D. e Dr. Julián Bravo Castillero por proporcionarem a fundamentação teórica para que este trabalho pudesse ser desenvolvido. Professor Julián Bravo-Castillero recebeu apoio financeiro da CAPES na modalidade Bolsista CAPES/Brasil do Programa Professor Visitante do Exterior – PVE, Ofício/CGI/CAPES N° 0452-11/2010. Gostaríamos de agradecer ao Prof. Dr. Adair Roberto Aguiar e ao Dr. Leslie Darien Pérez Fernández pelas contribuições ao desenvolvimento deste trabalho.

6 REFERÊNCIAS

- BAKHVALOV, N.; PANASENKO, G. **Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media**. K.A. Publishers, Netherlands, 1989.
- BASSET, C.A.I. Current Concepts of Bone Formation. **J. Bone Joint Surg.**, v.44, p. 1217-1244, 1962.
- BENSOUSSAN, A.; LIONS, J. L.; PAPANICOLAOU, G. **Asymptotic Analysis for Periodic Structures**. North Holland, Amsterdam, 1978.

- BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R.; OTERO, J. A.; RODRIGUEZ-RAMOS, R. Electromechanical Properties of Continuous fiber-reinforced piezoelectric Composites. **Mekh. Komp. Mat.** v.33, p. 670-680, 1997.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; OTERO, J. A.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; BOURGEAT, A. Asymptotic Homogenization of Laminated Piezocomposite Materials. **Int. Journal of Solids and Structures.** v 35, n. 5-6, p. 527-541, 1998.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R.; SABINA, F. J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R. Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents - II. Piezoelectric and Square Symmetry. **Mechanics of Materials**, v. 33, p. 237-248, 2001.
- BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; GUINOVART-DIAZ, R.; SABINA, F. J.; AGUIAR, A. R.; SILVA, U. P.; GOMEZ-MUNOZ, J. L. Analytical formulae for electromechanical effective properties of 3-1 longitudinally porous piezoelectric materials **Acta Materialia.** v. 57, n. 3, p. 795-803, 2009.
- DUARTE, L. R. The Simulation of Bone Growth by Ultrasound. **Achieves of Orthopedics and Traumatic Surge**, v. 101, p. 153-159, 1983.
- DAVI, F. The static electromechanical coupling factor in linear piezoelectric materials. **Journal of Structural Control**, v. 5, n. 2, p. 57-72, 1998.
- FORWARD, R.L. Electronic damping of vibrations in optical structures. **Journal of Applied Optics**, v. 18, n. 5, p.690-697, 1979.
- FRANCFORT, G. A. Homogenization and linear thermoelasticity. **SIAM J. Math. Anal.** v. 14, p. 696-708, 1984.
- FUKADA, E.; YASUDA, I. On Piezoelectric Effect of Bone. **Journal of The Physical Society of Japan**, v. 12, n. 10, p. 1158-1162, 1957.
- FYHRIE, D. P; JEPSEN, K. J.; HOLLISTER, S. J.; GOLDSTEIN, S. A. Predicting trabecular bone strength and micro-strain using homogenization theory. **Journal of Biomechanics.** v. 22, 1014, 1989.
- GALKA, A.; TELEGA, J. J.; WOJNAR, R. Some computational aspects of Homogenization of Thermopiezoelectric Composites. **Comput. Assisted Mech. Eng. Sci.** v. 3, p. 133-154, 1996.
- GUINOVART-DIAZ, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R.; SABINA, F. J. Closed-form expression for effective coefficients of fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents. - I: Elastic and Hexagonal symmetry. **Journal of the Mechanics and Physics of Sólids.** v. 49, p. 1445-1462, 2001.
- IKEDA, T. **Fundamentals of Piezoelectricity.** Oxford University Press, Oxford, 1990.
- THE INSTITUTE OF RADIO ENGINEERS. IRE standards on piezoelectric crystals: Determination of the elastic, piezoelectric, and dielectric constants – the electromechanical coupling factor. **Proceedings of the IRE**, 1958, v. 46, n. 4, p. 764-778.
- KALAMKAROV, A. L.; ANDRIANOV, I. V.; DANISHEVS'KYY, V. V. Asymptotic Homogenization of Composite Materials and Structures. **Applied Mechanics Reviews**, v. 62, n. 11, p. MAY. 2009.
- LOPEZ-LOPEZ, E.; SABINA, F.J.; BRAVO-CASTILLERO, J.; GUINOVART-DIAZ, R.; RODRIGUEZ-RAMOS, R. Overall electromechanical properties of a binary composite with 622 symmetry constituents. Antiplane shear piezoelectric state. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, p. 5765-5777, 2005.

MARKUSHEVICH, A. Teoría de las Funciones Analíticas (Tomo I & II). Editorial Mir, Moscow, 1970.

MEGUID, S. A.; KALAMKAROV, A. L. Asymptotic Homogenization of Elastic Composite Materials with a Regular Structure. **Int. Journal of Solids and Structures**. v 31, n. 3, p. 303-316, 1994.

NYE, J.F. Physical Properties of Crystals: Their representations by Tensors and Matrices. University Press, Oxford, 1969.

PRADO, E. B. T.; ROCHA, F. C.; ROCHA, G. L.; MATOS, L.; SAMPAIO, M. S. M.; SILVA, U. P. O método de homogeneização assintótica aplicado na obtenção dos coeficientes efetivos de um compósito elástico linear. Submetido ao Cadernos de Engenharia de Estruturas 2011.

SANCHEZ-PALENCIA, E. Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. **In: Lecture Notes in Physics**, 127. Springer-Verlag. New York, 1980.

SILVA, C. C.; THOMAZINI, D.; PINHEIRO, A. G.; ARANHA, N.; FIGUEIRO, S. D.; GOES, J. C.; SOMBRA, A. S. B. Collagen-hydroxyapatite films: piezoelectric properties. **Mater. Sci. Eng. B86**, p. 201-218, 2001.

TEBALDI, A.; JUNIOR, V. L.; COELHO, L. S. Detecção de falhas em estruturas inteligentes usando otimização por nuvem de partículas: Fundamentos e Estudo de Casos. **Revista Controle & Automação**. v. 17, n. 3, 2006.

TEKADA, K.; ITO, T.; KIKUCHI, N. Characterization of the mechanical behaviors of solid-fluidmixture by the homogenization method. **Comput. Methods Appl. Mech. Eng.** v. 153, p. 223-257, 1998.