

O MÉTODO DE HOMOGENEIZAÇÃO ASSINTÓTICA APLICADO NA OBTENÇÃO DOS COEFICIENTES EFETIVOS DE UM COMPÓSITO ELÁSTICO LINEAR

Edmar Borges Theóphilo Prado¹; Fabio Carlos Rocha²; Gabriel Lopes da Rocha³; Luciana de Matos⁴; Maria do Socorro Martins Sampaio⁵; Uziel Paulo da Silva⁶

Resumo

Os materiais compósitos possuem uma ampla faixa de aplicações em áreas tão distintas quanto a medicina e a engenharia aeroespacial. O uso destes materiais tem se intensificado nos últimos anos devido ao ganho em resistência e leveza que proporcionam. O Método de Homogeneização Assintótica (MHA) permite obter o comportamento global de um compósito para uma dada aplicação. Este método leva em consideração as propriedades físicas, tais como os coeficientes elásticos, e geométricas das fases do compósito. Neste trabalho, aplica-se o MHA para construir uma solução assintótica formal de um Problema de Valor de Contorno (PVC) no contexto da teoria de elasticidade linear anisotrópica com coeficientes periódicos e rapidamente oscilantes. Obtêm-se as equações dos problemas local e homogeneizado e as expressões gerais dos coeficientes efetivos. Demonstra-se que o tensor de elasticidade efetivo é positivo definido e simétrico.

Palavras-chave: Método de homogeneização assintótica. Coeficientes efetivos. Elasticidade linear. Anisotropia.

THE ASYMPTOTIC HOMOGENIZATION METHOD APPLIED TO DETERMINE THE EFFECTIVE COEFFICIENTS OF A LINEAR ELASTIC COMPOSITE

Abstract

Composite materials have a wide range of applications in areas as distinct as medicine and aerospace engineering. The use of composite materials has intensified in recent years due to the gain in strength and lightness they can provide. The Asymptotic Homogenization Method (AHM) allows obtaining the overall behavior of the composite for a given application. This method takes into account physical properties, such as the elastic coefficients, and geometric properties of the phases of the composite. In this paper, the AHM is applied in the construction of a formal asymptotic solution for a Boundary Value Problem (BVP) in the context of the anisotropic linear elasticity theory with rapidly oscillating periodic coefficients. Equations for both the local and homogenized problems and general expressions for the effective coefficients are obtained. It is shown that the effective elasticity tensor is positive definite and symmetric. .

Keywords: Asymptotic homogenization method. Effective coefficients. Linear elasticity. Anisotropy

1 INTRODUÇÃO

Os materiais compósitos constituem uma classe de materiais heterogêneos caracterizados por apresentar seu domínio ocupado por dois ou mais materiais homogêneos diferentes, distribuídos de

¹ Doutorando em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, edmarbt@sc.usp.br

² Doutorando em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, frocha@sc.usp.br

³ Mestrando em Bioengenharia PPGIB - EESC/FMRP/IQSC - USP, gabrielmat04@sc.usp.br

⁴ Doutoranda em Física - IFSC-USP, luciana.de.matos@gmail.com

⁵ Doutoranda em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, ssampaio@sc.usp.br

⁶ Doutorando em Bioengenharia PPGIB - EESC/FMRP/IQSC - USP, uziel@sc.usp.br

forma periódica ou aleatória. Este tipo de material é de grande interesse por combinar as diferentes propriedades de seus constituintes, tais como rigidez e resistência, à redução de peso e à flexibilidade de projeto. Assim, nos últimos anos pesquisadores de diferentes áreas, abrangendo desde a medicina até a engenharia aeroespacial, têm se dedicado ao desenvolvimento de novas metodologias de previsão do comportamento desses materiais e ao estudo de suas aplicações.

Em particular, (HAYASHIDA et al., 1997) apresentam uma revisão sobre a aplicação das fibras de carbono na engenharia civil e na arquitetura. Segundo estes autores, as fibras de carbono têm sido tradicionalmente empregadas com finalidade estrutural ou funcional na obtenção de compósitos avançados aplicados, principalmente, nas indústrias aeroespacial e esportiva. Na engenharia civil e arquitetura as fibras de carbono são empregadas na obtenção de concretos especiais, tais como o concreto reforçado com fibras de carbono. As fibras de carbono podem ser unidimensionais curtas, ou, longas, bidimensionais, ou, tridimensionais. As fibras curtas são empregadas no concreto com a finalidade de obter um material isotrópico utilizado em peças estruturais solicitadas por grandes momentos. Já as fibras longas são empregadas em uma direção preferencial com o objetivo de reforçar o membro estrutural naquela direção. Analogamente, as fibras bidimensionais são empregadas para reforçar membros estruturais, tais como pilares de pontes, segundo duas direções preferenciais. Finalmente, as fibras tridimensionais são empregadas como reforço interlaminar para melhorar a resistência à delaminação dos membros estruturais. Além de descrever o processo de fabricação destas fibras, os autores apresentam as formas de aplicação e as propriedades de cada uma delas.

Para aperfeiçoar o desempenho e as aplicações dos materiais compósitos, é necessário conhecer suas características e determinar suas propriedades efetivas. Evidentemente, materiais compósitos providos de microestruturas complexas ou aleatórias não são simples de modelar. O método de homogeneização (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) é bastante utilizado no modelamento destes materiais. Ele consiste em substituir o problema original associado ao sólido heterogêneo por um problema homogêneo equivalente com coeficientes efetivos constantes.

Compósitos com estrutura periódica permitem definir um elemento representativo de volume contendo todas as suas características físicas. No processo de homogeneização, utiliza-se este elemento representativo para se obter um meio globalmente equivalente e homogêneo do compósito. As constantes que caracterizam este meio homogeneizado são denominadas coeficientes efetivos. A medida da homogeneidade equivalente é dada pela proximidade entre as soluções do problema original sobre o meio heterogêneo e a do problema homogeneizado.

Dentre os métodos de homogeneização propostos para obter um modelo constitutivo, adequado para a determinação dos coeficientes efetivos dos compósitos com estrutura periódica, cita-se o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989; BENSOUSSAN et al., 1978; SANCHEZ-PALENCIA, 1980).

Obtém-se o problema homogeneizado, via MHA, assumindo que a solução do Problema de Valor de Contorno (PVC) original é uma série assintótica em termos de um parâmetro geométrico escalar ε com coeficientes dependentes das variáveis macroscópica, ou lenta x , e microscópica, ou rápida $y = x/\varepsilon$. O parâmetro ε pode ser interpretado fisicamente como a razão entre o tamanho característico da célula periódica do compósito, tal como o comprimento de um cubo elementar, e um tamanho representativo do compósito, tal como o comprimento de uma viga construída com material compósito. Os coeficientes efetivos do problema homogeneizado equivalente são determinados por meio da solução dos chamados problemas locais formulados sobre a célula periódica. Na teoria de elasticidade linear clássica, o MHA garante que a solução do PVC, com coeficientes periódicos e rapidamente oscilantes, converge para a solução do problema equivalente homogeneizado quando ε tende a zero (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

(BRAVO-CASTILLERO et al., 1998) utilizam o MHA para determinar as expressões analíticas das propriedades elásticas, piezoelétricas e dielétricas efetivas de um composto piezoelétrico laminado dotado de uma estrutura periódica. (BRAVO-CASTILLERO et al., 2006) obtêm fórmulas para

as propriedades efetivas de compostos elásticos com fases isotrópicas e reforçados com fibras cilíndricas circulares periodicamente distribuídas. As propriedades efetivas são obtidas para o caso de célula periódica e hexagonal. Os autores também investigam os casos limites de fibras vazias ou infinitamente rígidas. (KALAMKAROV et al., 2009) apresentam uma revisão sobre o MHA e analisam soluções analíticas de problemas com células unitárias para compósitos laminados reforçados com fibras. (BRAVO-CASTILLERO et al., 2009) aplicam o MHA para determinar fórmulas analíticas para as propriedades efetivas de compósitos multilaminados, periódicos, com propriedades termo-magneto-elastro-elásticas. Outras aplicações do MHA podem ser citadas, por exemplo, em termoelasticidade (FRANCFORT, 1984) e termopiezoelasticidade (GALKA et al., 1996).

O MHA pode fornecer uma estimativa das propriedades efetivas de compósitos de interesse na construção civil, tais como os citados por (HAYASHIDA et al., 1997), dependendo do grau de periodicidade da microestrutura destes materiais. No estudo do comportamento dos concretos, o MHA pode ser aplicado, por exemplo, para estudar as frações volumétricas de seus componentes. (FARAGE et al., 2009) simulam numericamente o módulo de elasticidade efetivo de concretos leves. A partir das propriedades elásticas do agregado e da argamassa empregados na composição do concreto é possível calcular o tensor elástico homogeneizado do material resultante. Segundo (FARAGE et al., 2009), as comparações dos resultados numéricos com medições experimentais indicam a potencialidade do MHA para prever o módulo de elasticidade de concretos.

Neste trabalho estuda-se um PVC do tipo Dirichlet, no contexto da elasticidade linear clássica, para sólidos anisotrópicos e heterogêneos, nos quais as propriedades do sólido estudado são descritas pelos 81 coeficientes C_{ijkl} do tensor de elasticidade do material em um sistema fixo de coordenadas cartesianas retangulares. Aqui, assume-se a elasticidade de Green, de modo que somente 21 coeficientes são independentes. O MHA é aplicado para construir uma solução assintótica formal de uma família de PVCs com coeficientes periódicos rapidamente oscilantes. Demonstra-se que as condições de simetria e de positividade do tensor de elasticidade do problema homogeneizado são preservadas.

Salienta-se que as fases dos compósitos considerados neste trabalho são anisotrópicas e que, portanto, compósitos contendo fases ortotrópicas, transversalmente isotrópicas e isotrópicas, comumente empregados em aplicações de engenharia, são casos particulares dos compósitos tratados aqui.

2 O MHA APLICADO AO ESTUDO DE UM PVC DA TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR

Nesta seção estuda-se um PVC que modela um corpo elástico-linear tridimensional, anisotrópico, heterogêneo, provido de uma estrutura periódica. Aplica-se o MHA na obtenção das equações de problemas locais que permitem, por sua vez, obter as expressões dos coeficientes efetivos do compósito. Estes coeficientes são utilizados nas equações governantes do problema homogeneizado. Demonstra-se que o tensor de elasticidade efetivo correspondente preserva as suas propriedades de simetria e de positividade. Nas demonstrações, todos os subíndices pertencem ao conjunto $\{1, 2, 3\}$ e a convenção de soma implícita é utilizada ao longo de todo o texto.

2.1 Obtenção da equação do problema homogeneizado

Seja um corpo elástico-linear, anisotrópico, heterogêneo, provido de uma estrutura periódica. Este corpo ocupa uma região Ω limitada e aberta do espaço Euclidiano tridimensional, com um contorno suave ou parcialmente suave $\partial\Omega$. Um ponto $x \in \Omega$ tem coordenadas (x_1, x_2, x_3) em um sistema de coordenadas cartesianas retangulares fixo.

Sejam u_k as componentes do vetor deslocamento u no sistema de coordenadas cartesianas. O PVC consiste em achar o campo de deslocamentos u_k tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + f_i(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3, \tag{1}$$

$$u_k = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

onde as componentes do tensor de elasticidade, C_{ijkl} , são funções reais Y -periódicas definidas sobre Ω e Y é uma célula periódica, tal como ilustrado na Fig. 1. As componentes do vetor das forças de corpo, $f_i(x)$, são funções reais e suaves definidas sobre Ω .

A Fig. 1 ilustra um exemplo de material compósito tridimensional com estrutura periódica. Aqui, a célula periódica Y é formada pelas regiões R_1 e R_2 , que representam, respectivamente, a matriz e a inclusão.

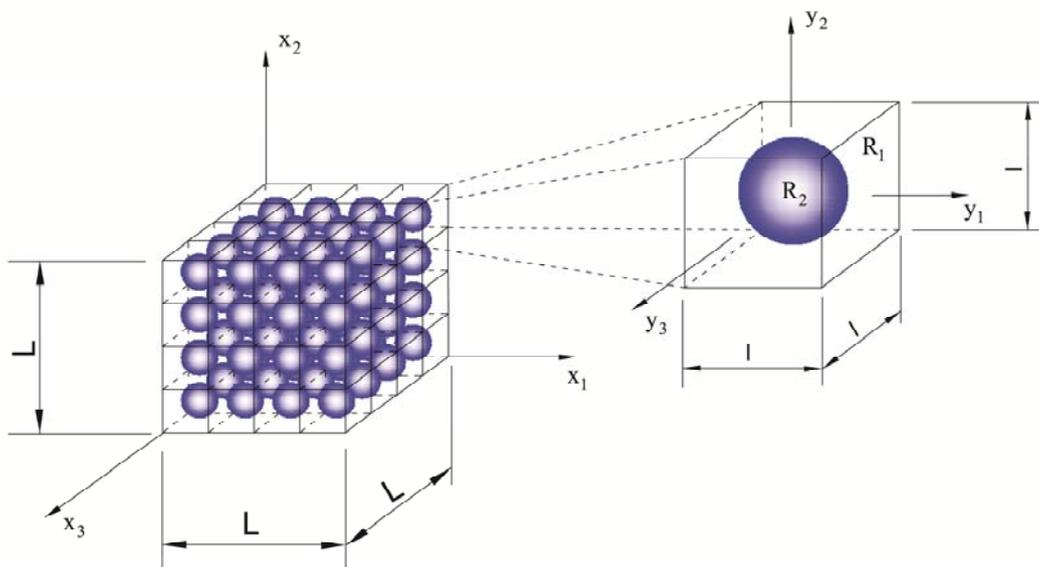


Figura 1 – Compósito com estrutura periódica. No destaque está representada a célula periódica Y com as regiões da matriz, R_1 , e inclusão, R_2 .

É comum modelar as características geométricas observadas na Fig. 1 por meio de duas variáveis, uma global, ou lenta $x = (x_1, x_2, x_3)$ e outra local, ou rápida $y = (y_1, y_2, y_3)$, relacionadas linearmente por $y = x/\varepsilon$, sendo ε um parâmetro geométrico pequeno representando a razão entre uma magnitude característica da célula periódica Y e uma magnitude característica de Ω .

Considerando a elasticidade de Green e as simetrias menores do tensor de elasticidade, é possível mostrar que os coeficientes do PVC dado pelas Eqs. (1)-(2) satisfazem

$$C_{ijkl}(y) = C_{jikl}(y) = C_{ijlk}(y) = C_{klij}(y) \quad \forall \quad y \in Y, \tag{3}$$

ou seja, a matriz que representa o tensor de elasticidade possui 21 coeficientes elásticos independentes. Além disso, o tensor de elasticidade é positivo definido, de modo que

$$\exists C(y) > 0, \forall y \in Y : C_{ijkl}(y) e_{kl} e_{ij} \geq C(y) e_{kl} e_{kl}, \forall e = (e_{ij}) \in \mathbb{E}_3^s, \quad (4)$$

onde \mathbb{E}_3^s é o espaço das matrizes simétricas de ordem 3. Desta forma, o problema dado pelas Eqs. (1)-(2) representa uma família de problemas para os quais a solução existe e é única para cada valor do parâmetro ε . Para maiores detalhes ver (CIORANESCU; DONATO, 1999).

Os deslocamentos u_k que satisfazem as Eqs. (1)-(2) admitem a expansão assintótica

$$u_k = \varepsilon^0 u_k^{(0)}(x, y) + \varepsilon^1 u_k^{(1)}(x, y) + \varepsilon^2 u_k^{(2)}(x, y) + \dots, \quad (5)$$

onde $u_k^{(h)}(x, y)$, com $h = 0, 1, 2, \dots$, são funções Y -periódicas com relação à variável rápida y .

Derivando-se a Eq. (5) e aplicando a regra da cadeia, dada por $\frac{d}{dx} u_k(x, y) = \frac{\partial u_k}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u_k}{\partial x}$, na expressão resultante, obtém-se

$$\frac{\partial u_k(x, y)}{\partial x_i} = \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_i} + \varepsilon^2 \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_i} + \dots \quad (6)$$

Substituindo-se a Eq. (6) na Eq. (1) e lembrando que o operador divergente é linear, resulta

$$\begin{aligned} f_i(x) = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y_i} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_i} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_i} \right) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_i} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_i} \right) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Aplicando-se novamente a regra da cadeia na Eq. (7), tem-se

$$\begin{aligned} f_i(x) = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_i} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y_i} \right) + \varepsilon^{-2} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial y_i} \right) + \\ & + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_i} \right) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_i} \right) + \\ & + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_i} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial x_i} \right) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_i} \right) + \frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_i} \right) + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Definindo-se o operador

$$L_{\alpha\beta} \varphi \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(C_{ijkl} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial \beta_i} \varphi \right), \quad (9)$$

a Eq. (8) pode ser reescrita em uma forma compacta como

$$\begin{aligned} f_i(x) = & L_{xx} u_k^{(0)} + \varepsilon^{-1} L_{yx} u_k^{(0)} + \varepsilon^{-1} L_{xy} u_k^{(0)} + \varepsilon^{-2} L_{yy} u_k^{(0)} + \varepsilon L_{xx} u_k^{(1)} + L_{yx} u_k^{(1)} + \\ & + L_{xy} u_k^{(1)} + \varepsilon^{-1} L_{yy} u_k^{(1)} + \varepsilon L_{xx} u_k^{(2)} + \varepsilon L_{yx} u_k^{(2)} + \varepsilon L_{xy} u_k^{(2)} + L_{yy} u_k^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Agrupando-se os termos com iguais potências em ε na Eq. (10), tem-se

$$f_i(x) = \varepsilon^{-2} L_{yy} u_k^{(0)} + \varepsilon^{-1} (L_{yy} u_k^{(1)} + L_{xy} u_k^{(0)} + L_{yx} u_k^{(0)}) + \varepsilon^0 (L_{yy} u_k^{(2)} + L_{xy} u_k^{(1)} + L_{yx} u_k^{(1)} + L_{xx} u_k^{(0)}) + O(\varepsilon) + \dots \tag{11}$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ na Eq. (11), obtém-se um sistema de equações para a determinação das funções $u_k^{(h)}$, $h = 0, 1, 2, \dots$, dado por

$$L_{yy} u_k^{(0)} = 0, \tag{12}$$

$$L_{yy} u_k^{(1)} = -L_{xy} u_k^{(0)} - L_{yx} u_k^{(0)}, \tag{13}$$

$$L_{yy} u_k^{(2)} = -L_{xy} u_k^{(1)} - L_{yx} u_k^{(1)} - L_{xx} u_k^{(0)} + f_i. \tag{14}$$

As Eqs. (12)-(14) representam uma sequência recorrente de PVCs locais, isto é, PVCs definidos sobre a célula periódica Y , a partir dos quais se elimina a oscilação rápida do problema original e obtém-se a equação do problema homogeneizado juntamente com as expressões dos coeficientes efetivos.

Para o tratamento desta sequência, introduz-se a definição de operador média de uma função Y -periódica $g : \Omega \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$\langle g(x, y) \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y g(x, y) dy,$$

onde $|Y|$ é o volume de Y , considerado unitário neste trabalho. Além disso, emprega-se o lema apresentado a seguir, que é um caso particular de um resultado mais geral apresentado no apêndice do livro de (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989).

LEMA 1: *Sejam $N = (N_i(y))$, $F = (F_i(y))$, $C_{ijkl}(y)$ funções suaves e Y -periódicas, com as componentes $C_{ijkl}(y)$ correspondendo a um tensor de elasticidade simétrico e positivo definido. O sistema $L_{yy} N = F$ tem solução na classe das funções Y -periódicas se e somente se $\langle F_i \rangle = 0$. Segue que $N = \underline{N} + C$, onde \underline{N} é uma solução de $L_{yy} N = F$ com média nula e C é um vetor constante.*

Reescrevendo a Eq. (12) com o auxílio da Eq. (9), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k^{(0)}(x, y)}{\partial y_i} \right) = 0. \tag{15}$$

Devido à linearidade da Eq. (15) e pelo Lema 1, tem-se que

$$u_k^{(0)}(x, y) = \underline{u}_k^{(0)}(x, y) + v_k(x), \tag{16}$$

onde $\underline{u}_k^{(0)}(x, y)$ é uma solução da Eq. (15) com média nula e v_k não depende da variável y . Em particular, toma-se $\underline{u}_k^{(0)}(x, y) = 0$, resultando em $u_k^{(0)}(x, y) = v_k(x)$. Deste modo, eliminou-se a oscilação rápida dos coeficientes C_{ijkl} .

Segue do parágrafo anterior que $L_{xy}u_k^{(0)} = 0$. Portanto, a Eq. (13) reduz-se a

$$L_{yy}u_k^{(1)} = -L_{yx}u_k^{(0)}. \quad (17)$$

Reescrevendo-se a Eq. (17) em sua forma expandida, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k^{(1)}(x, y)}{\partial y_l} \right) = - \frac{\partial}{\partial y_j} C_{ijkl}(y) \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_l}. \quad (18)$$

Em virtude da linearidade da Eq.(18), emprega-se o método de separação de variáveis, (WEINBERGER, 1965), para escrever a solução $u_k^{(1)}$ na forma

$$u_k^{(1)}(x, y) = N_{k(pq)}(y) \frac{\partial v_p(x)}{\partial x_q}, \quad (19)$$

onde $N_{k(pq)}(y)$ são funções Y-periódicas.

Substituindo-se a Eq. (19) na Eq. (18), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl}(y) \frac{\partial N_{k(pq)}(y)}{\partial y_l} \frac{\partial v_p(x)}{\partial x_q} + C_{ijkl}(y) \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_l} \right) = 0. \quad (20)$$

Rearranjando-se os índices na Eq. (20) e reescrevendo-a, chega-se a

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl}(y) \frac{\partial N_{k(pq)}(y)}{\partial y_l} + C_{ijpq}(y) \right) \frac{\partial v_p(x)}{\partial x_q} = 0. \quad (21)$$

Escolhe-se agora $N_k(y)$, Y-periódica, tal que

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl}(y) \frac{\partial N_{k(pq)}(y)}{\partial y_l} + C_{ijpq}(y) \right) = 0. \quad (22)$$

A Eq. (22) só depende da variável y e, portanto, está definida em Y . Observa-se ainda que a Eq. (22) permite a formulação do PVC em Y , denominada Equação do Problema Local, ou do problema elástico na célula periódica, no qual, em vez de condições de contorno, há condições de periodicidade para a função $N_{k(pq)}$.

Observa-se do exposto acima que o MHA conduz à formulação forte dos problemas locais sobre a célula periódica. Por meio da solução destes problemas é possível determinar as componentes elásticas efetivas do tensor de elasticidade, que são as propriedades mecânicas de um material homogeneizado. Em geral, este material homogeneizado é anisotrópico, mesmo quando todas as fases são isotrópicas.

Para estudar a existência de soluções Y-periódicas da Eq. (17), define-se

$$F \equiv -L_{yx}u_k^{(0)}. \quad (23)$$

Utilizando a Eq. (9) e lembrando que $u_k^{(0)}$ depende somente de x , escreve-se a Eq. (23) na forma expandida

$$F(x, y) = -\frac{\partial C_{ijkl}(y)}{\partial y_j} \frac{\partial u_k^{(0)}(x)}{\partial x_i}. \tag{24}$$

Aplicando o operador média na Eq. (24), obtém-se

$$\langle F \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} C_{ijkl}(y) \right\rangle \left(-\frac{\partial v_k(x)}{\partial x_i} \right). \tag{25}$$

Utilizando agora o Teorema da Divergência, (GURTIN, 1981), sobre o primeiro termo do lado direito da Eq. (25) e lembrando que $|Y| = 1$ e que os coeficientes C_{ijkl} são Y-periódicos, obtém-se

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} C_{ijkl}(y) \right\rangle = \int_{\partial Y} C_{ijkl}(y) \eta_j ds = 0, \tag{26}$$

onde η_j são as componentes do vetor normal unitário à superfície de Y . Segue, portanto, de (25) que $\langle F \rangle = 0$. Pelo Lema 1, a Eq. (26) tem solução na classe das funções Y-periódicas.

Para investigar a Eq. (14), redefine-se F como

$$F \equiv -L_{xy} u_k^{(1)} - L_{yx} u_k^{(1)} - L_{xx} u_k^{(0)} + f_i. \tag{27}$$

Utilizando as Eqs. (9) e (19), reescreve-se a Eq. (27) na forma expandida

$$F(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}(y) \frac{\partial}{\partial y_l} \left(N_{k(pq)}(y) \frac{\partial v_p(x)}{\partial x_q} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial y_j} \left(C_{ijkl}(y) \frac{\partial}{\partial x_l} \left(N_{k(pq)}(y) \frac{\partial v_p(x)}{\partial x_q} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl}(y) \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_i} \right) + f_i(x). \tag{28}$$

Lembrando da Eq. (16) que v_p depende somente de x , obtém-se

$$F(x, y) = -C_{ijkl}(y) \frac{\partial N_{k(pq)}(y)}{\partial y_l} \frac{\partial^2 v_p(x)}{\partial x_j \partial x_q} - \frac{\partial}{\partial y_j} \left((C_{ijkl} N_{k(pq)})(y) \frac{\partial^2 v_p(x)}{\partial x_l \partial x_q} \right) - C_{ijkl}(y) \frac{\partial^2 v_k(x)}{\partial x_j \partial x_i} + f_i(x). \tag{29}$$

Rearranjando os índices da Eq. (29), pode-se escrevê-la na forma

$$F \equiv -\left(C_{ijkl}(y) \frac{\partial N_{k(pq)}(y)}{\partial y_l} + \frac{\partial}{\partial y_m} (C_{imkj}(y) N_{k(pq)}(y)) + C_{ijpq}(y) \right) \frac{\partial^2 v_p(x)}{\partial x_j \partial x_q} + f_i. \tag{30}$$

Aplicando-se o operador média em ambos os lados da Eq. (30), tem-se

$$\langle F \rangle \equiv -\left\langle C_{ijkl}(y) \frac{\partial N_{k(pq)}(y)}{\partial y_l} + C_{ijpq}(y) \right\rangle \frac{\partial^2 v_p(x)}{\partial x_j \partial x_q} + \langle f_i \rangle, \tag{31}$$

onde

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_m} (C_{imkj} N_{k(pq)})(y) \right\rangle = 0, \quad (32)$$

pois $C_{imkj} N_{k(pq)}$ é Y -periódico para cada i .

A condição necessária e suficiente para que a Eq. (31) admita solução na classe das funções Y -periódicas é

$$\widehat{C}_{ijpq} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x_j \partial x_q} = \langle f_i \rangle, \quad (33)$$

onde

$$\widehat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijkl}(y) \frac{\partial N_{k(pq)}(y)}{\partial y_l} + C_{ijpq}(y) \right\rangle \quad (34)$$

é a expressão geral para os coeficientes efetivos.

Assim, a Eq. (33) pode ser reescrita como

$$\widehat{C}_{ijpq} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x_j \partial x_q} = f_i, \quad (35)$$

sendo esta, portanto, a equação do problema homogeneizado.

Resultados rigorosos sobre a proximidade entre a solução do problema original e a solução do problema homogeneizado podem ser consultados em (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989). Estes autores mostram, utilizando o princípio do máximo generalizado para equações elípticas, que

$$\|u^{(2)} - u\|_{C[\bar{\Omega}]} = O(\varepsilon), \quad (36)$$

$$\|u - v_0\|_{C[\bar{\Omega}]} = O(\varepsilon), \quad (37)$$

onde $C[\bar{\Omega}]$ é o espaço das funções contínuas em $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\|\cdot\|_e \triangleq \sup_{x \in \bar{\Omega}} |\cdot|$ e O é um símbolo de ordem ou símbolo de Landau.

2.2 Obtenção dos coeficientes efetivos \widehat{C}_{ijpq}

Nesta seção, demonstra-se a conservação das propriedades de simetria e de positividade do tensor de elasticidade efetivo com componentes \widehat{C}_{ijpq} para os problemas L_{pq} . As expressões analíticas destas componentes são apresentadas no apêndice.

2.2.1 Demonstração da conservação das propriedades de simetria e de positividade do tensor de elasticidade efetivo

A demonstração das propriedades de simetria e de positividade do tensor de elasticidade efetivo apresentada abaixo segue o desenvolvimento apresentado nos trabalhos de (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989; SIXTO, 2010).

Demonstra-se que $\hat{C}_{ijpq} = \hat{C}_{jipq}$, $\hat{C}_{ijpq} = \hat{C}_{ijqp}$ e $\hat{C}_{ijpq} = \hat{C}_{pqij}$, com $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq p \leq 3$. Para isto, introduz-se a notação

$$A_{jq}(y) = (C_{ijpq})_{i,p=1,2,3}, \text{ ou seja, } A_{jq}(y) = \begin{pmatrix} C_{1j1q} & C_{1j2q} & C_{1j3q} \\ C_{2j1q} & C_{2j2q} & C_{2j3q} \\ C_{3j1q} & C_{3j2q} & C_{3j3q} \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Pela expressão do coeficiente efetivo, dada pela Eq. (34), e utilizando uma das simetrias menores do tensor de elasticidade, $C_{ijpq} = C_{jipq}$, tem-se

$$\hat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijpq} + C_{ijsr} \frac{\partial N_{s(pq)}(y)}{\partial y_r} \right\rangle = \left\langle C_{jipq} + C_{jisr} \frac{\partial N_{s(pq)}(y)}{\partial y_r} \right\rangle = \hat{C}_{jipq}. \quad (39)$$

Utilizando agora a outra simetria menor, $C_{ijpq} = C_{ijqp}$, juntamente com

$$u_k^{(1)} = N_{k(pq)}(y) \frac{\partial v_p(x)}{\partial x_q} = N_{k(qp)}(y) \frac{\partial v_q(x)}{\partial x_p}, \text{ resulta em}$$

$$\hat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijpq} + C_{ijsr} \frac{\partial N_{s(pq)}(y)}{\partial y_r} \right\rangle = \left\langle C_{ijqp} + C_{ijrs} \frac{\partial N_{r(qp)}(y)}{\partial y_s} \right\rangle = \hat{C}_{ijqp}, \quad (40)$$

onde $N_{s(pq)}(y)$ são funções Y-periódicas.

Para mostrar a simetria maior,

$$\hat{C}_{ijpq} = \hat{C}_{pqij}, \quad (41)$$

utiliza-se a Eq. (34) juntamente com a Eq. (38) e define-se $N_s(y) \equiv N_{s(pq)}(y)$. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \hat{A}_{rs}(y) &= \left\langle A_{ri}(y) \frac{\partial N_s(y)}{\partial y_i} + A_{rs}(y) \right\rangle, \\ &= \left\langle A_{ri}(y) \frac{\partial N_s(y)}{\partial y_i} + A_{ri}(y) \frac{\partial y_s}{\partial y_i} \right\rangle, \\ &= \left\langle A_{ri}(y) \left(\frac{\partial (N_s(y) + y_s I_n)}{\partial y_i} \right) \right\rangle, \\ &= \left\langle A_{ri}(y) \left(\frac{\partial M_s(y)}{\partial y_i} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (42)$$

onde $M_s(y) \equiv N_s(y) + y_s I_n$ e I_n é a matriz identidade $n \times n$, com $n=3$.

Dado $M_s = (m_\gamma^{s\beta})$, os elementos da matriz \hat{A}_{rs} podem ser escritos como

$$\hat{C}_{irks} = \left\langle C_{irpq} \frac{\partial M_{p(sk)}}{\partial y_q} \right\rangle, \quad (43)$$

ou, ainda,

$$\hat{C}_{irks} = \left\langle C_{itpq} \frac{\partial m_p^{sk}}{\partial y_q} \frac{\partial y_r}{\partial y_t} \delta_{il} \right\rangle, \quad (44)$$

onde δ_{il} é o delta de Kronecker.

Por outro lado, tendo em vista a definição de M_s acima, a Eq. (22) toma a forma

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left(A_{jq}(y) \frac{\partial M_s(y)}{\partial y_q} \right) = 0. \quad (45)$$

Multiplicando agora a Eq. (45) por uma função teste $\varphi(y)$, matriz 3×3 , Y -periódica, e aplicando o operador média, tem-se

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} \left(A_{jq}(y) \frac{\partial M_s(y)}{\partial y_q} \right) \varphi(y) \right\rangle = 0. \quad (46)$$

Note que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} \left(A_{jq}(y) \frac{\partial M_s(y)}{\partial y_q} \right) \varphi(y) \right\rangle + \left\langle A_{jq}(y) \frac{\partial M_s(y)}{\partial y_q} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} \left(A_{jq}(y) \frac{\partial M_s(y)}{\partial y_q} \varphi(y) \right) \right\rangle,$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} \left(A_{jq}(y) \frac{\partial M_s(y)}{\partial y_q} \right) \varphi(y) \right\rangle = 0 \text{ devido à Eq. (46) e}$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_j} \left(A_{jq}(y) \frac{\partial M_s(y)}{\partial y_q} \varphi(y) \right) \right\rangle = 0 \text{ devido à periodicidade.}$$

Assim,

$$\left\langle A_{jq}(y) \frac{\partial M_s(y)}{\partial y_q} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y_j} \right\rangle = 0, \quad (47)$$

ou, em componentes,

$$\left\langle C_{itpq}(y) \frac{\partial m_p^{sk}(y)}{\partial y_q} \frac{\partial \varphi_{il}(y)}{\partial y_t} \right\rangle = 0. \quad (48)$$

Somando as Eqs. (44) e (48), obtém-se

$$\hat{C}_{irks} = \left\langle C_{ltpq} \frac{\partial m_p^{sk}(y)}{\partial y_q} \frac{\partial (\varphi_{il}(y) + y_r \delta_{il})}{\partial y_t} \right\rangle. \quad (49)$$

Fazendo $\varphi(y) = N_r^T$ e lembrando que $M_s(y) \equiv N_s(y) + y_s I_n$, tem-se

$$\hat{C}_{irks} = \left\langle C_{ltpq} \frac{\partial m_p^{sk}(y)}{\partial y_q} \frac{\partial m_l^{ri}(y)}{\partial y_t} \right\rangle = \left\langle C_{pqit} \frac{\partial m_p^{ri}(y)}{\partial y_t} \frac{\partial m_l^{sk}(y)}{\partial y_q} \right\rangle = \hat{C}_{ksir}. \quad (50)$$

Deste modo, demonstram-se todas as simetrias do tensor de elasticidade efetivo, ou seja,

$$\hat{C}_{ijpq} = \hat{C}_{jipq} = \hat{C}_{ijqp} = \hat{C}_{pqij}. \quad (51)$$

Demonstra-se agora a condição de positividade

$$\hat{A}_{rs} \eta_r \eta_s \geq \psi_1 (\eta_r, \eta_s), \quad (52)$$

onde \hat{A}_{rs} é a matriz dos coeficientes efetivos definida na Eq. (38) e $\psi_1 > 0$. Explicitamente, tem-se

$$\hat{C}_{irks} \eta_{ks} \eta_{ir} \geq \psi_1 \eta_{ir} \eta_{ir}, \quad (53)$$

onde η_{ir} são os elementos de uma matriz simétrica não-nula arbitrária. Logo, segue da Eq. (49) que

$$\hat{C}_{irks} = \left\langle C_{ltpq} \frac{\partial m_p^{sk}(y)}{\partial y_q} \frac{\partial m_l^{ri}(y)}{\partial y_t} \right\rangle. \quad (54)$$

Para demonstrar a Eq. (53), prova-se que

$$\hat{C}_{irks} \eta_{ks} \eta_{ir} = \left\langle C_{ltpq} \frac{\partial \eta_{ks} m_p^{sk}(y)}{\partial y_q} \frac{\partial \eta_{ir} m_l^{ri}(y)}{\partial y_t} \right\rangle \geq \psi_1 \eta_{ir} \eta_{ir}. \quad (55)$$

Dado que a matriz $A_{rs}(y)$ é positiva definida, tem-se que

$$C_{ltpq} \frac{\partial \eta_{ks} m_p^{sk}(y)}{\partial y_q} \frac{\partial \eta_{ir} m_l^{ri}(y)}{\partial y_t} \geq \psi_1 \sum_{il} \left(\frac{\partial}{\partial y_t} (\eta_{is} m_l^{ri}) \right). \quad (56)$$

Utilizando as Eqs. (55)-(56) e aplicando a desigualdade de Cauchy-Buniakowski-Schwarz, $(\langle fg \rangle^2 \leq \langle f \rangle^2 \langle g \rangle^2)$, resulta

$$\hat{C}_{irks} \eta_{ks} \eta_{ir} \geq \psi_1 \sum_{t,l} \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial y_t} (\eta_{ir} m_l^{ri}) \right)^2 \right\rangle \geq \psi_1 \sum_{t,l} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_t} (\eta_{ir} m_l^{ri}) \right\rangle^2. \quad (57)$$

Dado que $m_l^r = \eta_l^r$ se $l \neq i$, $m_l^r = \eta_l^r + y_r$ se $l = i$ e $N_r(y)$ é uma função Y -periódica, tem-se que $\left\langle \frac{\partial}{\partial y_t} (\eta_{ir} \eta_l^r) \right\rangle = 0$. Logo, o lado direito da Eq. (57) resulta em

$$\begin{aligned} \psi_1 \sum_{t,l} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_t} (\eta_{ir} m_l^r) \right\rangle^2 &= \psi_1 \sum_{t,l} \left\langle \frac{\partial}{\partial y_t} (\eta_{ir} y_r) \right\rangle^2, \\ &= \psi_1 \sum_{t,l} \left\langle \eta_{ir} \frac{\partial y_r}{\partial y_t} \right\rangle^2, \\ &= \psi_1 \sum_{j,\tau} (\eta_{ir})^2, \\ &= \psi_1 \mathbf{n}_{ir} \mathbf{n}_{ir}, \end{aligned} \tag{58}$$

portanto,

$$\hat{C}_{irks} \eta_{ks} \eta_{ir} \geq \psi_1 \eta_{ir} \eta_{ir}, \tag{59}$$

o que prova a positividade do tensor de elasticidade efetivo \hat{C} .

3 CONCLUSÃO

Neste estudo aplicou-se o MHA para a obtenção das expressões dos coeficientes efetivos de um material compósito, modelado por um PVC definido em um meio tridimensional, anisotrópico e heterogêneo da Teoria da Elasticidade Linear. Com o propósito de revisar e mostrar o formalismo do método, a solução do problema foi expressa por meio de uma expansão assintótica. Esta expansão, ao ser substituída no problema original, gera uma seqüência recorrente de problemas auxiliares que conduzem à formulação dos problemas locais ou problemas elásticos na célula periódica. As soluções destes problemas locais permitem determinar as expressões dos coeficientes efetivos e a equação do problema homogeneizado. Determinou-se a forma geral dos coeficientes do tensor de elasticidade efetivo, que representam as propriedades mecânicas do material homogeneizado. Além disto, demonstrou-se a conservação das propriedades de simetria e de positividade deste tensor de elasticidade.

4 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, por propiciar as condições de infra-estrutura necessárias, e aos seguintes órgãos que concederam suporte financeiro para o desenvolvimento deste trabalho: Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas (FAPEAM), Secretaria de Estado de Ciência e Tecnologia (SECT) e ao Governo do Estado do Amazonas. Os autores manifestam, também, seus mais sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Julián Bravo-Castillero por proporcionar a fundamentação teórica para o desenvolvimento deste trabalho por meio das aulas ministradas e valiosas trocas de idéias. Professor Julián Bravo-Castillero recebeu apoio financeiro da CAPES na modalidade Bolsista CAPES/Brasil do Programa Professor Visitante do Exterior – PVE, Ofício/CGI/CAPES N° 0452-11/2010. Gostaríamos de

agradecer ao Prof. Dr. Adair Roberto Aguiar e ao Dr. Leslie Darien Pérez Fernández pelas contribuições ao desenvolvimento deste trabalho.

5 REFERÊNCIAS

BAKHVALOV, N.; PANASENKO, G. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media – Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials**. Kluwer, Dordrecht, 1989, 366 p.

BENSOUSSAN, A.; LIONS, J.-L.; PAPANICOLAOU, G. **Asymptotic Analysis for Periodic Structures**. Amsterdam. The Netherlands: North-Holland, 1978.

BRAVO-CASTILLERO, J.; OTERO, J. A.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; BOURGEAT, A. (1998). Asymptotic Homogenization of Laminated Piezocomposite Materials. **Int. Journal of Solids and Structures**. v 35, n. 5-6, p. 527-541.

BRAVO-CASTILLERO, J.; SABINA, F. J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; GUINOVARTE-DÍAZ, R.; MIJANGOS, O. V.; SABINA DE LIS, J. C. Effective Elastic Properties of Periodic Fibrous Composites. Limit Cases. Applications to porous and nonlinear materials. **Computer Assisted Mechanics and Engineering Systems**, v. 13, p. 305-322, 2006.

BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRÍGUEZ-RAMOS, R.; MECHKOUR, H.; OTERO, J.A.; CABANAS, J. H.; SIXTO, L. M.; GUINOVARTE-DÍAZ, R.; SABINA, F. J. Homogenization and Effective Properties of Periodic Thermomagnetoelastic composites. **Journal of Mechanics of Materials and Structures**, v. 4, n. 5, p. 819-836, 2009.

CIORANESCU, D.; DONATO, P. **An introduction to homogenization**. Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, 1999. 224 p.

FARAGE, M. C. R.; BEAUCOUR, A. L.; BARRA, L. P. S.; KE, Y.; SANÁBIO, D. F. S., FERREIRA, A. P. G. Multiscale modeling of the elastic moduli of lightweight aggregate concretes: numerical estimation and experimental validation. **REM: Revista Escola de Minas**. v. 64, n. 4, p.455–462, Out-Dez., 2009.

FRANCFORT, G. A. Homogenization and linear thermoelasticity. **SIAM J. Math. Anal.** v. 14, p. 696-708, 1984.

GALKA, A.; TELEGA, J.J.; WOJNAR, R., (1996). Some computational aspects of homogenization of thermopiezoelectric composites. **Comput. Assisted Mech. Engng. Sci.** v. 3, p. 133-154.

GURTIN, E. M. **An introduction to continuum mechanics**. New York, USA: Academic Press, 1981. 265 p.

HAYASHIDA, M. ET. AL. **High-Modulus Pitch-Based Graphite Fibers for Civil Engineering and Architectural Applications**. Nippon Steel Technical Report. N. 74, Julho, 1997.

KALAMKAROV, A. L.; ANDRIANOV, I. V.; DANISHEVS'KYY, V. V. Asymptotic Homogenization of Composite Materials and Structures. **Applied Mechanics Reviews**, v. 62, n. 11, p. MAY. 2009.

SANCHEZ-PALENCIA, E. **Non-homogeneous Media and Vibration Theory**. Lectures Notes in Physics, n. 127. Springer, Berlin, 1980.

SIXTO, L. M. **Homogeneización de compuestos termo-magneto-electro-elásticos com estrutura periódica**. 2010. 87p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Matemática e Computação, Universidade de Havana, Cidade de Havana/Cuba, 2010.

WEINBERGER, H. F. **A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods**. Waltham, Massachusetts-USA: Blaisdell Publishing Company, 1965.

APÊNDICE

Obtenção das expressões analíticas dos coeficientes efetivos para os problemas L_{pq}

Lembra-se da seção 2.1 que a expressão geral para o cálculo dos coeficientes efetivos de um sólido elástico-linear é dada pela Eq. (34). Esta equação pode ser reescrita na forma expandida como

$$\hat{C}_{ijpq} = \left\langle C_{ijpq} + C_{ij11} \frac{\partial N_{1(pq)}}{\partial y_1} + C_{ij12} \frac{\partial N_{1(pq)}}{\partial y_2} + C_{ij13} \frac{\partial N_{1(pq)}}{\partial y_3} + C_{ij21} \frac{\partial N_{2(pq)}}{\partial y_1} + C_{ij22} \frac{\partial N_{2(pq)}}{\partial y_2} + C_{ij23} \frac{\partial N_{2(pq)}}{\partial y_3} + C_{ij31} \frac{\partial N_{3(pq)}}{\partial y_1} + C_{ij32} \frac{\partial N_{3(pq)}}{\partial y_2} + C_{ij33} \frac{\partial N_{3(pq)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.1)$$

Conforme mostrado neste trabalho, o tensor dos coeficientes efetivos conserva suas propriedades de simetria, embora se obtenha a partir da Eq. (A.1) expressões diferentes para um mesmo resultado. Isto ocorre porque, por exemplo, as funções $N_{k(13)}$ e $N_{k(33)}$ são soluções de problemas locais diferentes, ou seja, $N_{k(13)}$ é solução do problema L_{13} enquanto que $N_{k(33)}$ é solução do problema L_{33} . Desta forma, é possível controlar os resultados dos cálculos numéricos para cada material compósito de interesse, pois a partir de problemas diferentes com fórmulas diferentes deve-se obter os mesmos resultados. Este fato mostra a possibilidade de autocontrole dos cálculos dos coeficientes efetivos obtidos com o emprego do MHA.

Utilizando a Eq. (A.1) para obtenção dos coeficientes efetivos de todos os problemas L_{pq} , têm-se as seguintes expressões:

Problema L_{11}

$$\hat{C}_{1111} = \left\langle C_{1111} + C_{1111} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_1} + C_{1112} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_2} + C_{1113} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_3} + C_{1121} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_1} + C_{1122} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_2} + C_{1123} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_3} + C_{1131} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_1} + C_{1132} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_2} + C_{1133} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.2)$$

$$\hat{C}_{2211} = \left\langle C_{2211} + C_{2211} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_1} + C_{2212} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_2} + C_{2213} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_3} + C_{2221} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_1} + C_{2222} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_2} + C_{2223} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_3} + C_{2231} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_1} + C_{2232} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_2} + C_{2233} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.3)$$

$$\hat{C}_{3311} = \left\langle C_{3311} + C_{3311} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_1} + C_{3312} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_2} + C_{3313} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_3} + C_{3321} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_1} + C_{3322} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_2} + C_{3323} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_3} + C_{3331} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_1} + C_{3332} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_2} + C_{3333} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.4)$$

$$\hat{C}_{2311} = \left\langle C_{2311} + C_{2311} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_1} + C_{2312} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_2} + C_{2313} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_3} + C_{2321} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{2322} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_2} + C_{2323} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_3} + C_{2331} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_1} + C_{2332} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_2} + C_{2333} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{C}_{1311} = \left\langle C_{1311} + C_{1311} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_1} + C_{1312} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_2} + C_{1313} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_3} + C_{1321} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1322} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_2} + C_{1323} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_3} + C_{1331} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_1} + C_{1332} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_2} + C_{1333} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{C}_{1211} = \left\langle C_{1211} + C_{1211} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_1} + C_{1212} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_2} + C_{1213} \frac{\partial N_{1(11)}}{\partial y_3} + C_{1221} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1222} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_2} + C_{1223} \frac{\partial N_{2(11)}}{\partial y_3} + C_{1231} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_1} + C_{1232} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_2} + C_{1233} \frac{\partial N_{3(11)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Problema L₂₂

$$\hat{C}_{1122} = \left\langle C_{1122} + C_{1111} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_1} + C_{1112} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_2} + C_{1113} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_3} + C_{1121} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1122} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_2} + C_{1123} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_3} + C_{1131} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_1} + C_{1132} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_2} + C_{1133} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{C}_{2222} = \left\langle C_{2222} + C_{2211} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_1} + C_{2212} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_2} + C_{2213} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_3} + C_{2221} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{2222} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_2} + C_{2223} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_3} + C_{2231} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_1} + C_{2232} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_2} + C_{2233} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.9})$$

$$\hat{C}_{3322} = \left\langle C_{3322} + C_{3311} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_1} + C_{3312} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_2} + C_{3313} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_3} + C_{3321} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{3322} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_2} + C_{3323} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_3} + C_{3331} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_1} + C_{3332} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_2} + C_{3333} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.10})$$

$$\hat{C}_{2322} = \left\langle C_{2322} + C_{2311} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_1} + C_{2312} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_2} + C_{2313} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_3} + C_{2321} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{2322} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_2} + C_{2323} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_3} + C_{2331} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_1} + C_{2332} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_2} + C_{2333} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{C}_{1322} = \left\langle C_{1322} + C_{1311} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_1} + C_{1312} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_2} + C_{1313} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_3} + C_{1321} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1322} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_2} + C_{1323} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_3} + C_{1331} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_1} + C_{1332} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_2} + C_{1333} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.12})$$

$$\hat{C}_{1222} = \left\langle C_{1222} + C_{1211} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_1} + C_{1212} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_2} + C_{1213} \frac{\partial N_{1(22)}}{\partial y_3} + C_{1221} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1222} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_2} + C_{1223} \frac{\partial N_{2(22)}}{\partial y_3} + C_{1231} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_1} + C_{1232} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_2} + C_{1233} \frac{\partial N_{3(22)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.13)$$

Problema L₃₃

$$\hat{C}_{1133} = \left\langle C_{1133} + C_{1111} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_1} + C_{1112} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_2} + C_{1113} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_3} + C_{1121} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1122} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_2} + C_{1123} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_3} + C_{1131} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_1} + C_{1132} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_2} + C_{1133} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.14)$$

$$\hat{C}_{2233} = \left\langle C_{2233} + C_{2211} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_1} + C_{2212} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_2} + C_{2213} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_3} + C_{2221} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{2222} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_2} + C_{2223} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_3} + C_{2231} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_1} + C_{2232} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_2} + C_{2233} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.15)$$

$$\hat{C}_{3333} = \left\langle C_{3333} + C_{3311} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_1} + C_{3312} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_2} + C_{3313} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_3} + C_{3321} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{3322} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_2} + C_{3323} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_3} + C_{3331} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_1} + C_{3332} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_2} + C_{3333} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.16)$$

$$\hat{C}_{3313} = \left\langle C_{3313} + C_{3311} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_1} + C_{3312} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_2} + C_{3313} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_3} + C_{3321} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{3322} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_2} + C_{3323} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_3} + C_{3331} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_1} + C_{3332} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_2} + C_{3333} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.17)$$

$$\hat{C}_{1333} = \left\langle C_{1333} + C_{1311} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_1} + C_{1312} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_2} + C_{1313} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_3} + C_{1321} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1322} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_2} + C_{1323} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_3} + C_{1331} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_1} + C_{1332} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_2} + C_{1333} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.18)$$

$$\hat{C}_{1233} = \left\langle C_{1233} + C_{1211} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_1} + C_{1212} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_2} + C_{1213} \frac{\partial N_{1(33)}}{\partial y_3} + C_{1221} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1222} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_2} + C_{1223} \frac{\partial N_{2(33)}}{\partial y_3} + C_{1231} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_1} + C_{1232} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_2} + C_{1233} \frac{\partial N_{3(33)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.19)$$

Problema L₂₃

$$\hat{C}_{1123} = \left\langle C_{1123} + C_{1111} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_1} + C_{1112} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_2} + C_{1113} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_3} + C_{1121} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1122} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_2} + C_{1123} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_3} + C_{1131} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_1} + C_{1132} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_2} + C_{1133} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.20)$$

$$\hat{C}_{2223} = \left\langle C_{2223} + C_{2211} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_1} + C_{2212} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_2} + C_{2213} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_3} + C_{2221} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{2222} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_2} + C_{2223} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_3} + C_{2231} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_1} + C_{2232} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_2} + C_{2233} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.21})$$

$$\hat{C}_{3323} = \left\langle C_{3323} + C_{3311} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_1} + C_{3312} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_2} + C_{3313} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_3} + C_{3321} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{3322} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_2} + C_{3323} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_3} + C_{3331} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_1} + C_{3332} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_2} + C_{3333} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.22})$$

$$\hat{C}_{2323} = \left\langle C_{2323} + C_{2311} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_1} + C_{2312} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_2} + C_{2313} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_3} + C_{2321} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{2322} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_2} + C_{2323} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_3} + C_{2331} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_1} + C_{2332} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_2} + C_{2333} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.23})$$

$$\hat{C}_{1323} = \left\langle C_{1323} + C_{1311} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_1} + C_{1312} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_2} + C_{1313} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_3} + C_{1321} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1322} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_2} + C_{1323} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_3} + C_{1331} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_1} + C_{1332} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_2} + C_{1333} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.24})$$

$$\hat{C}_{1223} = \left\langle C_{1223} + C_{1211} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_1} + C_{1212} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_2} + C_{1213} \frac{\partial N_{1(23)}}{\partial y_3} + C_{1221} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1222} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_2} + C_{1223} \frac{\partial N_{2(23)}}{\partial y_3} + C_{1231} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_1} + C_{1232} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_2} + C_{1233} \frac{\partial N_{3(23)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.25})$$

Problema L₁₃

$$\hat{C}_{1113} = \left\langle C_{1113} + C_{1111} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_1} + C_{1112} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_2} + C_{1113} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_3} + C_{1121} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1122} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_2} + C_{1123} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_3} + C_{1131} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_1} + C_{1132} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_2} + C_{1133} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.26})$$

$$\hat{C}_{2213} = \left\langle C_{2213} + C_{2211} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_1} + C_{2212} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_2} + C_{2213} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_3} + C_{2221} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{2222} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_2} + C_{2223} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_3} + C_{2231} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_1} + C_{2232} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_2} + C_{2233} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.27})$$

$$\hat{C}_{3313} = \left\langle C_{3313} + C_{3311} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_1} + C_{3312} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_2} + C_{3313} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_3} + C_{3321} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{3322} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_2} + C_{3323} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_3} + C_{3331} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_1} + C_{3332} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_2} + C_{3333} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.28})$$

$$\hat{C}_{2313} = \left\langle C_{2313} + C_{2311} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_1} + C_{2312} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_2} + C_{2313} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_3} + C_{2321} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_1} + C_{2322} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_2} + C_{2323} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_3} + C_{2331} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_1} + C_{2332} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_2} + C_{2333} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.29)$$

$$\hat{C}_{1313} = \left\langle C_{1313} + C_{1311} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_1} + C_{1312} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_2} + C_{1313} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_3} + C_{1321} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_1} + C_{1322} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_2} + C_{1323} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_3} + C_{1331} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_1} + C_{1332} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_2} + C_{1333} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.30)$$

$$\hat{C}_{1213} = \left\langle C_{1213} + C_{1211} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_1} + C_{1212} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_2} + C_{1213} \frac{\partial N_{1(13)}}{\partial y_3} + C_{1221} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_1} + C_{1222} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_2} + C_{1223} \frac{\partial N_{2(13)}}{\partial y_3} + C_{1231} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_1} + C_{1232} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_2} + C_{1233} \frac{\partial N_{3(13)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.31)$$

Problema L₁₂

$$\hat{C}_{1112} = \left\langle C_{1112} + C_{1111} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_1} + C_{1112} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_2} + C_{1113} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_3} + C_{1121} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_1} + C_{1122} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_2} + C_{1123} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_3} + C_{1131} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_1} + C_{1132} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_2} + C_{1133} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.32)$$

$$\hat{C}_{2212} = \left\langle C_{2212} + C_{2211} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_1} + C_{2212} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_2} + C_{2213} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_3} + C_{2221} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_1} + C_{2222} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_2} + C_{2223} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_3} + C_{2231} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_1} + C_{2232} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_2} + C_{2233} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.33)$$

$$\hat{C}_{3312} = \left\langle C_{3312} + C_{3311} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_1} + C_{3312} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_2} + C_{3313} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_3} + C_{3321} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_1} + C_{3322} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_2} + C_{3323} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_3} + C_{3331} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_1} + C_{3332} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_2} + C_{3333} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.34)$$

$$\hat{C}_{2312} = \left\langle C_{2312} + C_{2311} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_1} + C_{2312} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_2} + C_{2313} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_3} + C_{2321} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_1} + C_{2322} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_2} + C_{2323} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_3} + C_{2331} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_1} + C_{2332} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_2} + C_{2333} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.35)$$

$$\hat{C}_{1312} = \left\langle C_{1312} + C_{1311} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_1} + C_{1312} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_2} + C_{1313} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_3} + C_{1321} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_1} + C_{1322} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_2} + C_{1323} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_3} + C_{1331} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_1} + C_{1332} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_2} + C_{1333} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (A.36)$$

$$\hat{C}_{1212} = \left\langle C_{1212} + C_{1211} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_1} + C_{1212} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_2} + C_{1213} \frac{\partial N_{1(12)}}{\partial y_3} + C_{1221} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_1} \right. \\ \left. + C_{1222} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_2} + C_{1223} \frac{\partial N_{2(12)}}{\partial y_3} + C_{1231} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_1} + C_{1232} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_2} + C_{1233} \frac{\partial N_{3(12)}}{\partial y_3} \right\rangle. \quad (\text{A.37})$$