

ESTUDO DE UM PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO DA TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR SOBRE MEIOS HETEROGÊNEOS

Edmar Borges Theóphilo Prado¹

Resumo

Neste trabalho estuda-se um problema de valor de contorno misto sobre um meio elástico-linear, anisotrópico e heterogêneo, sendo apresentada a expressão da energia de deformação elástica e discutidos alguns aspectos da unicidade da solução. Obtém-se, também, a formulação clássica desse problema para um material composto por duas fases elásticas com condições ideais de contato e a sua formulação variacional formal. Posteriormente, demonstra-se a equivalência entre ambas as formulações. Em seguida são apresentadas algumas verificações sobre a unicidade da formulação variacional e a equivalência do problema variacional com um problema de minimização de um funcional.

Palavras-chave: Elasticidade linear. Meios heterogêneos. Anisotropia. Compósitos.

STUDY OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FROM THE THEORY OF LINEAR ELASTICITY IN HETEROGENEOUS MEDIA

Abstract

In this paper, a mixed boundary value problem on a heterogeneous, anisotropic, and linearly elastic medium is studied, being the expression of the elastic strain energy and some aspects of the uniqueness of the solution presented. Also, the classic formulation of this problem for a material composed of two elastic phases with ideal conditions of contact and their formal variational formulation is obtained. Then, the equivalence between both formulations is shown. Finally, the demonstrations of the uniqueness of the variational formulation and the equivalence of the variational problem to the minimization of certain functional are presented.

Keywords: Linear elasticity. Heterogeneous media. Anisotropy. Composites.

1 INTRODUÇÃO

De um modo geral, qualquer material formado por dois ou mais componentes com diferentes propriedades e que ocupam regiões bem delimitadas pode ser referido como um material compósito (VASILIEV; MOROSOV, 2001). A utilização desses materiais tem aumentado significativamente no decorrer dos últimos anos nas mais diferentes áreas da engenharia, tais como a aeroespacial, a aeronáutica, a elétrica e a civil. Esta utilização crescente deve-se principalmente aos ganhos significativos de resistência e redução de peso, em relação aos seus constituintes individuais e à flexibilidade de projeto proporcionada pelo controle da anisotropia.

Para estudar as propriedades dos materiais compósitos providos de estrutura periódica, um dos métodos que pode ser empregado é o Método de Homogeneização Assintótica (MHA). O MHA

¹ Doutorando em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, edmarbt@sc.usp.br

consiste em obter um meio homogeneizado equivalente ao meio heterogêneo, considerando que a solução do Problema de Valor de Contorno (PVC) que corresponde ao problema do meio heterogêneo, é dada por uma série assintótica em potências de um parâmetro geométrico pequeno γ com coeficientes dependentes das variáveis global, ou lenta x , e local, ou rápida $y = x/\gamma$. Este parâmetro γ é calculado pela razão entre o tamanho característico da célula periódica do compósito, por exemplo, o comprimento da aresta de um cubo elementar, e um tamanho representativo do compósito, por exemplo, o comprimento de uma laje construída com material compósito. A partir de problemas locais formulados sobre a célula periódica são determinados os coeficientes efetivos do problema homogeneizado equivalente. (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989) mostram que a solução do PVC com coeficientes periódicos e rapidamente oscilantes, no contexto da teoria de elasticidade linear clássica, converge para a solução do problema equivalente homogeneizado do MHA quando γ tende a zero.

(KARI et al., 2008) avaliam as propriedades efetivas de diferentes tipos de compósitos formados por três fases (reforço, matriz e interface), utilizando técnicas de homogeneização numérica (aproximação por Elemento Representativo de Volume (ERV)) com base no MEF. O ERV é definido como o menor volume que representa de forma suficientemente precisa o comportamento global do material. Estes autores avaliam ainda a influência de parâmetros da interface, como a rigidez e fração de volume, nas propriedades materiais efetivas de compósitos com fibras unidirecionais distribuídas transversalmente de forma aleatória e compósitos com partículas esféricas distribuídas aleatoriamente. Os ERVs necessários para estudar estes compósitos são gerados utilizando uma versão modificada do algoritmo de adsorção sequencial aleatória com condições de periodicidade nas superfícies opostas do contorno dos ERVs. Os resultados numéricos são comparados com os resultados do MHA para os arranjos regulares de compósitos de fibras unidirecionais. Segundo (KARI et al., 2008), as propriedades efetivas dos compósitos estudados dependem fortemente das propriedades da interface, pois esta pode não possuir uma rigidez suficiente para transmitir o carregamento entre a matriz e o reforço.

Na engenharia civil o MHA pode ser aplicado, por exemplo, para estudar a influência da variação das frações volumétricas de agregados nas propriedades efetivas do concreto, como o estudo feito por (Farage et al., 2009) que simulam numericamente o módulo de elasticidade efetivo de concretos leves. A partir das propriedades elásticas do agregado e da argamassa, empregados na composição do concreto, estes autores calculam o tensor elástico homogeneizado do material resultante e o comparam com resultados experimentais. Tais comparações indicam a potencialidade do MHA aplicado na simulação do módulo de elasticidade de concretos.

Para estudar misturas asfálticas, (SOUZA, 2005) desenvolve um modelo computacional multiescala (global e local) fundamentado no MEF para a previsão do comportamento mecânico de misturas asfálticas do tipo Areia Asfalto Usinada a Quente (AAUQ). Nas misturas AAUQ o comportamento da escala maior, ou global, considerada homogênea, é determinado a partir do comportamento da escala menor heterogênea, ou local, formada por agregados pétreos elásticos distribuídos em uma matriz viscoelástica denominada de mastique (ligante asfáltico misturado com agregados finos). Segundo este autor, os resultados obtidos com o modelo desenvolvido mostram a capacidade do modelo multi-escala em simular o comportamento de misturas asfálticas sob diferentes condições de carregamento, como por exemplo, a aplicação de deslocamentos monotônicos em compressão diametral e cargas cíclicas de flexão aplicadas em viga bi-apoiada. Ainda segundo (SOUZA, 2005), o modelo desenvolvido mostra-se capaz de simular os principais fatores de deterioração das misturas asfálticas, os quais incluem o acúmulo de deformação permanente, a perda de rigidez do material por fadiga na escala local, e o trincamento por fadiga na escala global.

Em outro trabalho de interesse na engenharia civil, (SAENGER, 2008) faz uma revisão de diferentes abordagens numéricas para determinar os valores de coeficientes elásticos efetivos de amostras digitalizadas de um corpo de prova de arenito Fontainebleau, o qual representa de forma realista um material rochoso com porosidades. Segundo (SAENGER, 2008), considerando que a utilização da maioria das teorias vigentes para o cálculo de constantes efetivas de meios

heterogêneos é restrita a um número limitado de geometrias, a gama de aplicações possíveis dos métodos numéricos é muito mais ampla. Ainda segundo este autor, ambas as abordagens estática e dinâmica para o cálculo de coeficientes efetivos são sensíveis aos efeitos de tamanho dos corpo de prova. Os métodos estáticos podem resolver este problema através da aplicação condições de contorno uniforme, sejam elas condições de tensão uniforme ou de deslocamento uniforme. Para as simulações dinâmicas de propagação de ondas, a relação entre o comprimento de onda dominante ao tamanho típico da inclusão é o fator mais preponderante, (SAENGER, 2008).

Outro estudo de interesse é realizado por (PRADO; AGUIAR 2009), os quais comparam as tensões e deformações obtidas via MEF e via MHA em um ERV de um material laminado transversalmente isotrópico composto por duas fases. Neste trabalho (PRADO; AGUIAR, 2009) verificam que os valores obtidos via MEF tendem aos valores obtidos via MHA quando o número de lâminas tende ao infinito. Verifica-se também que a geometria do sólido não influencia na determinação das curvas de tensão versus deformação quando o laminado é submetido às mesmas condições de contorno e simetria.

(AGUIAR; PRADO, 2009) propõem uma metodologia não-iterativa de elementos finitos para determinar o módulo de elasticidade ao cisalhamento μ em um corpo linearmente elástico, heterogêneo e isotrópico. O método baseia-se no conhecimento de dois campos de deslocamento linearmente independentes que podem ser obtidos de experimentos quase-estáticos possíveis de serem realizados em laboratório. Os autores apresentam a formulação forte de uma classe de problemas planos, discutem aspectos de unicidade dos problemas inversos correspondentes, apresentam a formulação fraca destes problemas inversos juntamente com a formulação discreta correspondente e, por fim, apresentam resultados numéricos que estão em excelente acordo com soluções analíticas correspondentes. Este trabalho é de grande interesse na avaliação não-destrutiva de materiais.

Aqui, amplia-se o estudo realizado por (AGUIAR; PRADO, 2009) para materiais isotrópicos e considera-se a formulação de problemas que envolvam um meio elástico-linear, anisotrópico e heterogêneo. Há, no entanto, uma distinção importante entre o presente trabalho e o dos autores acima, pois aqui os problemas tratados são diretos enquanto que no trabalho daqueles autores os problemas são inversos. O presente estudo baseia-se no trabalho de (SANCHEZ-HUBERT; SANCHEZ-PALENCIA, 1992) e nas notas de aula de (BRAVO-CASTILLERO, 2009). Este estudo serve de base para modelagens de materiais compósitos no contexto da teoria de elasticidade linear clássica que aplicam métodos oriundos de princípios variacionais, tais como o MEF, ou métodos de homogeneização, como o MHA. Para uma fundamentação a respeito do MEF veja, por exemplo, (HUGHES, 1987). A aplicação do MHA aos problemas da teoria de elasticidade pode ser consultada em (ALLEN, 2001), (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989), (CIORANESCU; DONATO, 1999), (MANEVITCH et al., 2002), (MILTON, 2002) e (OLEĬNIK et al., 1992).

O trabalho está organizado como segue. Na Seção 2 apresenta-se um PVC misto da elasticidade linear para meios anisotrópicos e heterogêneos e as suas formulações diferencial e integral. Ainda na Seção 2, apresentam-se a expressão da energia de deformação elástica e a demonstração da unicidade da solução da formulação integral, considerando as propriedades de simetria e positividade dos tensores destes meios, assim como da energia de deformação elástica. Em seguida, na Seção 3, apresenta-se a formulação de um problema de valor de contorno misto da elasticidade para um material composto por duas fases elásticas com condições ideais de contato. Nesta seção, mostra-se a equivalência do problema variacional relacionado ao problema de valor de contorno. Na Seção 4, apresentam-se verificações da unicidade de solução do problema variacional e a equivalência do problema variacional com um problema de minimização de um funcional, cujo conhecimento é de grande interesse em aplicações quando, por exemplo, requer-se realizar cálculos numéricos via MEF. Na Seção 5, apresentam-se as conclusões.

2 EXEMPLO DE UM PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO MISTO SOBRE UM MEIO ELÁSTICO-LINEAR, ANISOTRÓPICO E HETEROGÊNEO

2.1 Formulação diferencial

Seja um corpo elástico-linear, anisotrópico e heterogêneo ocupando uma região Ω aberta e limitada de $\mathbb{R}^3$. Seja também $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ uma base ortonormal para um sistema de coordenadas cartesianas retangulares fixa na origem. A lei de Hooke generalizada para este corpo é então

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}), \quad (1)$$

onde a_{ijkl} são os coeficientes elásticos do meio, $\mathbf{u}$ é o campo de deslocamento, cujas componentes são u_i , e σ_{ij} e ε_{kl} são as componentes dos tensores da tensão e da deformação infinitesimal, respectivamente. Ambos os tensores são simétricos e de segunda ordem. Emprega-se a notação de Einstein para índices repetidos. As componentes do tensor deformação infinitesimal na Eq. (1) são dadas por

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Se o material for isotrópico, então a Eq. (1) toma a forma

$$\sigma_{ij} = \lambda(\mathbf{x}) \varepsilon(\mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu(\mathbf{x}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}), \quad (3)$$

onde $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ e λ, μ são os coeficientes de Lamé, os quais podem depender de $\mathbf{x}$, ou seja, os a_{ijkl} podem ser escritos em termos de duas constantes independentes λ, μ .

Os coeficientes elásticos na Eq. (1) satisfazem as seguintes condições de simetria

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk}. \quad (4)$$

Utilizando as equações de equilíbrio

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

sendo f_i as componentes das forças de volume atuantes sobre o corpo, e a Eq. (1), obtém-se um sistema de equações diferenciais parciais para a determinação de $\mathbf{u}$, o qual é dado por

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

Para definir o problema de valor de contorno, necessita-se ainda impor condições sobre u_i , $i = 1, 2, 3$, e suas derivadas no contorno de Ω . Estas condições podem ser de três tipos (SOKOLNIKOFF, 1956), as quais estão descritas abaixo.

- Condições de deslocamento impostas sobre a fronteira $\partial\Omega$ de Ω , $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{U}$, onde $\mathbf{U}$ é uma função suficientemente suave e conhecida sobre $\partial\Omega$.
- Condições de carregamento impostas $\sigma_{ij}n_j$ são dados sobre $\partial\Omega$, $\sigma_{ij}n_j|_{\partial\Omega} = F_i$, onde n_j são as componentes do vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$, e $F_i, i = 1, 2, 3$ são funções suficientemente suaves e conhecidas sobre $\partial\Omega$.
- Condições mistas de deslocamento sobre uma parte $\partial_1\Omega$ da fronteira de Ω , e tração $\mathbf{F}$ dada sobre $\partial_2\Omega = \partial\Omega - \partial_1\Omega$ e $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$ (ver Fig. 1), $\sigma_{ij}n_j|_{\partial_2\Omega} = F_i$. Aqui também as funções $\mathbf{U}$ e $F_i, i = 1, 2, 3$, são suaves e conhecidas sobre as partes de $\partial\Omega$ onde elas estão definidas.

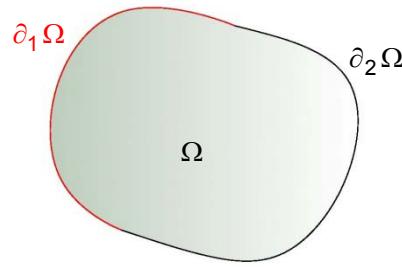


Figura 1 – Representação da região Ω e as partes do seu contorno para as condições mistas.

Neste trabalho considera-se as condições do tipo c), chamadas de condições mistas, para o caso $\mathbf{U} = \mathbf{0}$

$$u_i|_{\partial_1\Omega} = 0, \quad \sigma_{ij}n_j|_{\partial_2\Omega} = F_i. \quad (6)$$

2.2 Formulação integral

Seja V o conjunto de todos os campos de deslocamento suficientemente suaves e cinematicamente admissíveis (Eq. (2)) definidos sobre Ω que satisfazem as condições da Eq. (6)₁. A este conjunto chama-se conjunto dos deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis.

Um elemento $\mathbf{v}$ de V é dado por $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$, onde v_i , $i = 1, 2, 3$, são suficientemente suaves sobre todo Ω , incluindo o seu contorno. Logo, tem-se a equação integral

$$\int_{\Omega} a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx = \int_{\partial_2\Omega} F_i v_i dS + \int_{\Omega} f_i v_i dx \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (7)$$

O termo à esquerda da Eq. (7) representa o dobro do trabalho virtual dos esforços internos, W_i , ao corpo, e o termo à direita representa o dobro do trabalho virtual das forças externas, W_e , aplicadas sobre o corpo.

Para demonstrar a Eq. (7), multiplica-se ambos os membros da Eq. (5) por v_i e integrando sobre Ω , tem-se que

$$\int_{\Omega} f_i v_i dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) v_i dx. \quad (8)$$

Aplicando a regra da derivada do produto de funções na Eq. (8), resulta

$$\int_{\Omega} f_i v_i dx = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) v_i) - a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \right] dx, \quad (9)$$

sendo $\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

Reescrevendo a Eq. (9), ou seja,

$$\int_{\Omega} f_i v_i dx = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) v_i) \right] dx + \int_{\Omega} [a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})] dx, \quad (10)$$

e aplicando o teorema de Green, tem-se que

$$\int_{\partial\Omega} (a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) v_i n_j dS + \int_{\Omega} f_i v_i dx = \int_{\Omega} [a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})] dx. \quad (11)$$

Utilizando as condições de contorno dadas pela Eq. (6) notando que $a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) n_j = F_i$ em $\partial_2\Omega$ e zero em $\partial_1\Omega$, obtém-se finalmente que

$$\int_{\partial_2 \Omega} F_i v_i dS + \int_{\Omega} f_i v_i dx = \int_{\Omega} [a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})] dx, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (12)$$

Observa-se do exposto acima, então que, em virtude da linearidade, cumpre-se que se $\mathbf{u} \in V$ é solução do problema dado nas Eqs.(5)-(6) também o é $\xi \mathbf{u}$, os dados são ξf e ξF com $\xi \in [0,1]$.

2.3 Energia de deformação elástica

Os resultados anteriores nos permitem chegar à expressão de um elemento diferencial dW_e do trabalho de forças externas para deslocamentos virtuais do tipo $\mathbf{v} = \xi \mathbf{u}$, a saber:

$$dW_e = \int_{\partial_2 \Omega} \xi F_i u_i d\xi dS + \int_{\Omega} \xi f_i u_i d\xi dx = \xi d\xi \left[\int_{\partial_2 \Omega} F_i u_i dS + \int_{\Omega} f_i u_i dx \right]. \quad (13)$$

Integrando em ambos os membros da Eq. (13) com respeito à $\xi \in [0,1]$ resulta

$$W_e = \frac{1}{2} \left[\int_{\partial_2 \Omega} F_i u_i dS + \int_{\Omega} f_i u_i dx \right], \quad (14)$$

de onde, tendo em conta as Eqs. (7) e (14) para $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, tem-se

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx, \quad (15)$$

ou seja, os trabalhos das forças internas e externas são iguais, $W_i = W_e$. Por isso, a partir deste ponto denotam-se ambos os trabalhos por W .

Segundo a Eq. (15), a quantidade W representa o trabalho proporcionado ao meio pelas forças externas. Esta quantidade é chamada energia de deformação elástica. A condição necessária e suficiente para que a energia armazenada W seja independente do processo de carga do elemento de volume considerado é (Sanchez-Hubert; Sanchez-Palencia, 1992)

$$a_{ijkl} = a_{klij}. \quad (16)$$

Os corpos elásticos opõem naturalmente uma resistência à deformação, a quantidade W deve ser positiva para toda deformação não identicamente nula, a qual implica que os coeficientes devem satisfazer a condição $a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) > 0$ para todo tensor simétrico de componentes ε_{kl} não nulos. Isto significa que a forma quadrática definida pelos coeficientes elásticos deve ser definida positiva, ou seja,

$$\exists C(\mathbf{x}) > 0 \text{ para } \mathbf{x} \in \Omega; \quad a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} \geq C(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl} \varepsilon_{kl}. \quad (17)$$

2.4 Unicidade da solução

Para verificar a unicidade da solução do problema definido pelas Eqs. (5) e (6), utiliza-se a propriedade dada pela Eq. (17). Suponha-se que o problema admite duas soluções $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Primeiro, verifica-se que $W = 0$ para $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, ou seja,

$$W = 0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx. \quad (18)$$

Com efeito, como $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, ambas satisfazem a Eq. (5), em virtude da linearidade da derivada tem-se

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) = 0 \text{ em } \Omega, \quad (19)$$

ou seja, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ satisfaz um sistema de equações diferenciais homogêneas (como a Eq. (5) mas com $\mathbf{f}_i = 0$).

Similarmente, sobre $\partial_2\Omega$ do contorno de Ω , tem-se

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u})n_j|_{\partial_2\Omega} = 0, \quad (20)$$

ou seja, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ satisfaz a condição de contorno dada pela Eq. (6) com $F_i = 0$. Além disso, como $\mathbf{u}_1|_{\partial_1\Omega} = \mathbf{u}_2|_{\partial_2\Omega} = \mathbf{0}$ por serem soluções do problema original, é evidente que $\mathbf{u}|_{\partial_1\Omega} = \mathbf{0}$. Então, segue da Eq. (14) que $W = 0$.

Finalmente, de acordo com as Eqs. (15) e (17) $0 \geq \int_{\Omega} C(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})d\mathbf{x}$ de onde resulta

$\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = 0 \quad \forall k, l$ o que é verdadeiro quando $\mathbf{u}$ é constante, e como $\mathbf{u}|_{\partial_1\Omega} = \mathbf{0}$ então necessariamente $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$, o qual verifica a unicidade.

3 FORMULAÇÃO CLÁSSICA DE UM PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO MISTO DA ELASTICIDADE LINEAR PARA UM MATERIAL COMPOSTO POR DUAS FASES ELÁSTICAS COM CONDIÇÕES IDEAIS DE CONTATO

3.1 Problema de valor de contorno para o compósito bifásico

Suponha agora que a região Ω é constituída por duas subregiões Ω^1 e Ω^2 separadas por uma superfície $\Gamma = \Omega^1 \cap \Omega^2$. A Fig. 2 ilustra um exemplo da região Ω constituída por dois materiais, os quais ocupam as subregiões Ω^1 e Ω^2 , respectivamente.

Neste caso, os coeficientes de elasticidade $a_{ijkl}(\mathbf{x})$ são funções definidas da seguinte forma

$$a_{ijkl}(\mathbf{x}) = \begin{cases} a_{ijkl}^1(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^1; \\ a_{ijkl}^2(\mathbf{x}) & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^2, \end{cases} \quad (21)$$

onde os coeficientes a_{ijkl}^m , $m = 1, 2$, são funções suficientemente regulares sobre Ω^m que satisfazem as condições de simetria e positividade dadas pelas Eqs. (4), (16) e (17).

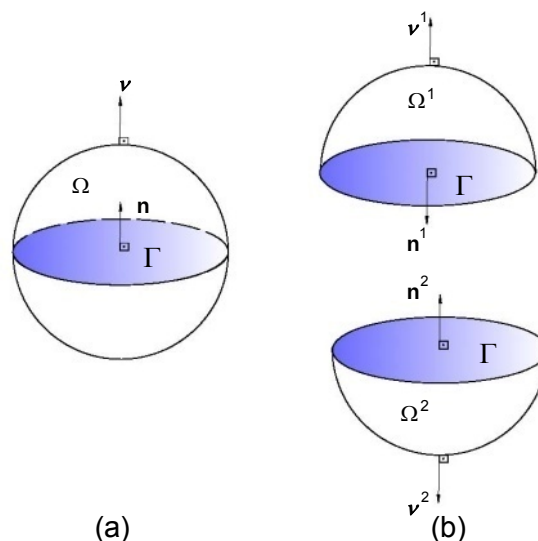


Figura 2 – (a) um sólido esférico composto por dois materiais, e (b) o sólido dividido segundo as regiões ocupadas pelos dois materiais.

Então, o problema de valor de contorno é dado pelas Eqs. (1), (2), (6), e (21), e condições para garantir a continuidade dos deslocamentos e as trações na superfície de contato Γ . Assim, as condições de contato perfeito são

$$[[u_i]] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma; \quad (22)$$

$$[[\sigma_{ij}n_j]] = 0 \quad \text{sobre } \Gamma; \quad (23)$$

onde $[[f]] = f^1 - f^2$ denota o salto de f sobre Γ .

3.2 Problema variacional relacionado ao problema de valor de contorno. Equivalência

Define-se agora o espaço das funções cinematicamente admissíveis por

$$V = \left\{ \mathbf{v} : \Omega^1 \cup \Omega^2 \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{v}|_{\partial_1\Omega} = 0; \quad [[\mathbf{v}]]_\Gamma = 0 \right\}. \quad (24)$$

O PVC dado pelas Eqs. (1), (2), (6), (21), (22) e (23) é chamado de problema na forma forte e é escrito em sua forma variacional, ou forma fraca, da seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \mathbf{u} \in V \text{ tal que} \\ \int_{\Omega^1 \cup \Omega^2} a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega^1 \cup \Omega^2} f_i v_i dx + \int_{\partial_2\Omega} F_i v_i dS \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{array} \right. \quad (25)$$

As soluções do problemas nas formas forte e fraca são únicas e a mesma. Por conseguinte, diz-se que os problemas nas formas forte e fraca são equivalentes, ver (HUGHES, 1987).

Para demonstrar esta equivalência, seja V o espaço de funções cinematicamente admissíveis dado pela Eq. (24). Sejam ainda

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{u}^1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^1 \\ \mathbf{u}^2 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega^2 \end{cases}. \quad (26)$$

Note-se que podemos escrever $\Omega^m = \Omega_m \cup \Gamma$ e, portanto, $\partial\Omega^m = \partial\Omega_m \cup \Gamma$. De modo similar, pode-se escrever $\mathbf{v}$ na forma dada para $\mathbf{u}$ pela Eq. (26).

Multiplicando a Eq. (2) por v_i e integrando sobre Ω , ou seja,

$$- \int_{\Omega^1 \cup \Omega^2} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u})) v_i dx = \int_{\Omega^1 \cup \Omega^2} f_i v_i dx. \quad (27)$$

Decompondo a integral da Eq. (27) em duas partes, segundo as regiões Ω^1 e Ω^2 , isto é, para a região Ω^1 , tem-se ao aplicar a integração por partes e o teorema de Green

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega^1} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkl}^1(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^1)) v_i dx &= \int_{\Omega^1} (a_{ijkl}^1(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^1) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}^1)) dx - \int_{\Omega^1} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkl}^1(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^1) v_i^1) dx \\ &= \int_{\Omega^1} (a_{ijkl}^1(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^1) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}^1)) dx - \int_{\partial\Omega^1} a_{ijkl}^1(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^1) v_i^1 \eta_j^1 dS, \end{aligned} \quad (28)$$

onde η_j^1 são as componentes do vetor unitário normal a Ω^1 . Similarmente, para a região Ω^2 , tem-se

$$\int_{\Omega^2} (a_{ijkl}^2(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^2) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}^1)) dx - \int_{\partial\Omega^2} a_{ijkl}^2(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^2) v_i \eta_j^2 dS. \quad (29)$$

onde η_j^2 são as componentes do vetor unitário normal a Ω^2 . Decompondo-se as integrais sobre cada parte das superfícies $\partial\Omega^1$ e $\partial\Omega^2$, ou seja,

$$\int_{\partial\Omega^1 = \partial\Omega_1 \cup \Gamma} \sigma_{ij}^1 v_i^1 \eta_j^1 dS = \int_{\partial\Omega_1} \sigma_{ij}^1 v_i^1 \eta_j^1 dS + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^1 v_i^1 \eta_j^1 dS, \quad (30)$$

$$\int_{\partial\Omega^2 = \partial\Omega_2 \cup \Gamma} \sigma_{ij}^2 v_i^2 \eta_j^2 dS = \int_{\partial\Omega_2} \sigma_{ij}^2 v_i^2 v_j^2 dS + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^2 v_i^2 \eta_j^2 dS, \quad (31)$$

onde $\eta_j^m|_{\partial\Omega_m} = v_j^m$ e $\eta_j^m|_{\Gamma} = n_j^m$ (ver Fig. 2), e $\sigma_{ij}^m = a_{ijkl}^m(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^m)$. Somando a Eq. (30) à Eq. (31), sabendo que $n_j^1 = -n_j^2$

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} v_i \eta_j dS = \int_{\partial\Omega^1 \cup \partial\Omega^2} \sigma_{ij} v_i \eta_j dS = \int_{\partial\Omega_1} \sigma_{ij} v_i v_j^1 dS + \int_{\partial\Omega_2} \sigma_{ij} v_i v_j^2 dS. \quad (32)$$

As integrais sobre $\partial\Omega_1$ e $\partial\Omega_2$ do termo à direita da Eq. (33) representam as condições de força e deslocamento dadas pela Eq. (6). Na Eq. (32) o termo $\int_{\partial_1 \Omega} \sigma_{ij} v_i v_j^1 dS$ é igual a zero pela Eq.

(24).

Agora, reescrevendo o resultado da soma apresentado na Eq. (32), tem-se

$$\int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} v_i dS = \int_{\partial_2 \Omega} \sigma_{ij} v_i dS = \int_{\partial_2 \Omega} F_i v_i dS. \quad (33)$$

Retomando a Eq. (27), ao aplicar o teorema de Green e reescrevê-la, considerando a Eq. (6) e o resultado da Eq. (33), tem-se

$$\int_{\Omega} (a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})) dx - \int_{\partial_2 \Omega} a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) v_i v_j^2 dS = \int_{\Omega} f_i v_i dx, \quad (34)$$

lembrando que $\int_{\partial_2 \Omega} a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) v_i v_j^2 dS = \int_{\partial_2 \Omega} F_i v_i dS$, finalmente pode-se escrever a Eq. (34) na forma

dada pela Eq. (7), completando a demonstração.

Um comentário que se faz neste ponto é que para o caso de uma região Ω contendo uma inclusão e considerando o contato perfeito entre a inclusão e a matriz tem-se que o procedimento é análogo e chega-se ao mesmo resultado dado pela Eq. (7).

4 ALGUNS COMENTÁRIOS A RESPEITO DA UNICIDADE DA FORMULAÇÃO VARIACIONAL E A EQUIVALÊNCIA COM A MINIMIZAÇÃO DE UM FUNCIONAL

Pode-se verificar a unicidade da formulação variacional, Eq. (25), por meio da aplicação do teorema de Lax-Milgram, ver por exemplo, (CIORANESCU; DONATO, 1999) e (SANCHEZ-HUBERT; SANCHEZ-PALENCIA, 1992).

Verifica-se que o problema dado pela Eq. (25) satisfaz as hipóteses do teorema de Lax-Milgram com o espaço $V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega), \mathbf{v}|_{\partial_1 \Omega} = 0\}$, a forma bilinear $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx, \quad (35)$$

e o funcional linear L

$$\langle L, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f_i v_i dx + \int_{\partial_2 \Omega} F_i v_i dS. \quad (36)$$

Primeiro, verifica-se que a forma bilinear na Eq. (35) é contínua sobre V . Assim,

$$\begin{aligned}
|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} (a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})) dx \right| \leq \left| \int_{\Omega} (k_1 \eta_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})) dx \right| \leq k_1 \eta_{ij} \left| \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})) dx \right| \\
&\leq k_2 \eta_{ij} \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})) dx \leq C \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v})) dx \quad (\text{por Cauchy – Schwarz}) \\
&\leq C \int_{\Omega} |\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})|^2 dx \int_{\Omega} |\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})|^2 dx \\
&\leq C_1 \underbrace{\|\mathbf{u}\|_V}_{\text{utiliz. a eq. de normas}} \|\mathbf{v}\|_V \leq C_1 C_2 C_3 \|\mathbf{u}\|_H \|\mathbf{v}\|_H \leq C \|\mathbf{u}\|_H \|\mathbf{v}\|_H \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.
\end{aligned} \tag{37}$$

Na última expressão da Eq. (37), que completa a demonstração, sugere-se consultar (CIORANESCU; DONATO, 1999), onde é apresentada a equivalência entre as normas $\|\cdot\|_V$ e $\|\cdot\|_H$. Uma outra referência onde se encontram estas demonstrações é o trabalho de (FIGUEIREDO; VIAÑO, 2005), que apresentam as demonstrações para o caso linear isotrópico.

Agora vejamos que a forma bilinear na Eq. (36) é elíptica sobre V . Assim,

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} a_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx \\
&\geq \int_{\Omega} k_2 \eta_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx \geq k_2 \eta_{ij} \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx \geq C_4 \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx \\
&\geq C_4 C_5 \|\mathbf{u}\|_H^2 \geq \alpha_0 \|\mathbf{u}\|_H^2 \quad \forall \mathbf{u} \in V.
\end{aligned} \tag{38}$$

No último passo da Eq. (38) utilizou-se a Primeira Desigualdade de Korn conjuntamente com a Desigualdade de Poincaré para completar a demonstração, ver (OLEÍNIK et al., 1992).

O teorema de Lax-Milgram permite, em particular, demonstrar o seguinte resultado sobre a minimização de funcionais quadráticos que são de sumo interesse em importantes aplicações na teoria da elasticidade.

Seja H um espaço de Hilbert, L um funcional linear e contínuo sobre H , e $a = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ uma forma bilinear, simétrica, contínua e elíptica sobre H , então existe uma única função $\mathbf{u} \in H$ para a qual o funcional $l(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \langle L, \mathbf{v} \rangle$ alcança o seu valor mínimo.

Para maiores detalhes, sugere-se consultar (SANCHEZ-HUBERT; SANCHEZ-PALENCIA, 1992).

A forma $a = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e o funcional L satisfazem as hipóteses do teorema de Lax-Milgram, que existe uma única solução $\mathbf{u} \in H$ do problema variacional dado na Eq. (25). Qualquer que seja $\mathbf{v} \in H$ é possível expressá-la na forma $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ com $\mathbf{w} \in H$. Utilizando o caráter bilinear e simétrico de $a = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, e a linearidade de L , tem-se

$$\begin{aligned}
l(\mathbf{u} + \mathbf{w}) &= \frac{1}{2} a(\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} + \mathbf{w}) - \langle L, \mathbf{u} + \mathbf{w} \rangle \\
&= \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) - \langle L, \mathbf{u} \rangle - \langle L, \mathbf{w} \rangle \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle L, \mathbf{u} \rangle}_{l(\mathbf{u})} + \underbrace{a(\mathbf{u}, \mathbf{w}) - \langle L, \mathbf{w} \rangle}_0 \text{ Pela Eq. (25)} + \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = l(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}),
\end{aligned} \tag{39}$$

de onde resulta, em virtude do caráter elíptico de forma $a = a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, que $l(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - l(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{w}, \mathbf{w}) \geq \alpha_0 \|\mathbf{w}\|_H^2 \quad \forall \mathbf{w} \in H$, e como $\alpha_0 > 0$ finalmente tem-se que o incremento $l(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - l(\mathbf{u}) \geq 0$ e a igualdade ocorre apenas quando $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, ou seja, o que se queria provar.

Este teorema fornece um resultado muito importante que permite a busca da solução do problema variacional, Eq. (25) (ou a de seu equivalente problema na forma forte dado pelas Eqs. (1),

(2), (6), (21), (22) e (23)) como um problema de minimização do funcional $I(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{L}, \mathbf{v} \rangle$. É interessante, também, que para o problema estudado resulta que o ínfimo do funcional é negativo e igual ao oposto da energia de deformação elástica, ou seja, que se $\mathbf{u}$ é a solução de Eq. (25) então $I(\mathbf{u}) = -W$.

Finalmente, sugere-se consultar (SANCHEZ-HUBERT; SANCHEZ-PALENCIA, 1992), em que são apresentados resultados de interesse devido à importância destas formulações para a aplicação de métodos aproximados de solução, como o MEF.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho estudou-se um problema de valor de contorno misto sobre um meio elástico-linear anisotrópico e heterogêneo, apresentando-se a expressão da energia de deformação elástica e demonstrando-se a unicidade da solução. Também apresentou-se a formulação desse problema para um material composto por duas fases elásticas com condições ideais de contato e a sua formulação variacional formal, sendo que na seção 3.2, resolveu-se o problema de um de sólido constituído de dois materiais. A abordagem feita para resolver o problema descrito na seção 3.2 pode ser estendida para resolver os problemas sobre uma célula periódica. Em seguida, demonstrou-se a equivalência entre ambas as formulações, a forte e a variacional. Nas duas últimas seções foram apresentadas algumas verificações sobre a unicidade da formulação variacional e a equivalência do problema variacional com um problema de minimização de um funcional. A importância deste estudo é dar de maneira mais compreensível para engenheiros os fundamentos teóricos das aplicações aos cálculos numéricos utilizando, por exemplo, o MEF.

6 AGRADECIMENTOS

O autor manifesta seus agradecimentos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido, ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP por proporcionar as condições acadêmicas para o desenvolvimento deste trabalho. O autor agradece também ao Prof. Dr. Julián Bravo-Castillero, Professor Visitante do Exterior –, Ofício/CGI/CAPES Nº 0452-11/2010, que possibilitou a fundamentação teórica com suas aulas ministradas, e pelo apoio e auxílio no desenvolvimento deste trabalho. O autor manifesta os seus agradecimentos ao Dr. Leslie Darien Pérez Fernández pelas sugestões feitas para a melhoria deste trabalho.

7 REFERÊNCIAS

- AGUIAR, A. R.; PRADO, E. B. T. A Numerical Procedure for the Determination of Elastic Parameters in an Incompressible Solid, In: SOLID MECHANICS IN BRAZIL 2009 - MECSOL 2009, Rio de Janeiro, RJ: Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas (ABCM), p. 1-14. 2009. ISBN 978-85-85769-43-7.
- ALLEN, D. H. Homogenization Principles and their Application to Continuum Damage Mechanics. **Composites Science and Technology**, v. 61, p. 2223-2230, Jul., 2001.
- BAKHVALOV, N.; PANASENKO, G. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media – Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials**. Kluwer, Dordrecht, 1989, 366 p.

BRAVO-CASTILLERO, J. **Homogeneização e propriedades efetivas de materiais compostos**. São Carlos, SP: EESC-USP, 2009. (Notas de Aula).

CIORANESCU, D.; DONATO, P. **An introduction to homogenization**. Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, 1999. 224 p.

FARAGE, M. C. R.; BEAUCOUR, A. L.; BARRA, L. P. S.; KE, Y.; SANÁBIO, D. F. S., FERREIRA, A. P. G. Multiscale modeling of the elastic moduli of lightweight aggregate concretes: numerical estimation and experimental validation. **REM: R. Esc. Minas** v. 64, n. 4, p.455–462, Out-Dez., 2009.

FIGUEIREDO, J.; VIAÑO, J. M. **Finite elements Q_1 -Lagrange for the linear elasticity problem**. Universidade do Minho, Portugal, 2005. (Technical Report). Disponível em: <<http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/5198/1/linearelasticity.pdf>>. Acesso em: 8 agosto 2010.

HUGHES, T.J.R. **The finite element method**: Linear Static and Dynamic Analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1987, 803 p.

KARI, S., BERGER, H.; GABBERT, U; GUINOVART-DIAZ, R.; BRAVO-CASTILLERO, J.; RODRIGUEZ-RAMOS, R. Evaluation of influence of interphase material parameters on effective material properties of three phase composites. **Composites Science and Technology**, v. 68, p. 684–691, Sep., 2008.

MANEVITCH, L.I., ANDRIANOV, I. V., OSHMYAN, V.G. **Mechanics of Periodically Heterogeneous Structures** – Series: Foundations of Engineering Mechanics, Springer, Berlim, 2002, 264 p.

MILTON, G. W. **The theory of composites**, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2002, 800 p.

OLEĬNIK, O. A.; SHAMAEV, A. S.; YOSIFIAN, G. A. **Mathematical problems in elasticity and homogenization**, JAI Press (Elsevier), North-Holland, Amsterdam, 1992, 412 p.

PRADO, E. B. T.; AGUIAR, A. R. Estudo do comportamento de um sólido elástico-linear transversalmente isotrópico via MHA e via MEF. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 11, n. 53, p. 117-121, 2009. ISSN: 1809-5860. Disponível em: <<http://www.set.eesc.usp.br/cadernos>>. Acesso em: 15 dez. 2010.

SAENGER, E. H. Numerical methods to determine effective elastic properties. **International Journal of Engineering Science**, v. 46, p. 598–605, Feb., 2008.

SANCHEZ-HUBERT, J.; SANCHEZ-PALENCIA, E. **Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation**. Application à la mécanique des milieux continus. MASSON, 1992. 266 p.

SOKOLNIKOFF, I. S. **Mathematical theory of elasticity**. 2. ed., New York: McGraw-Hill, 1956, 476 p.

SOUZA, F. V. **Modelo multi-escala para análise estrutural de compósitos viscoelásticos suscetíveis ao dano**. 2005. 189 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Transportes) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2005.

VASILIEV, V. V.; MOROSOV, E. V. **Mechanics and analysis of composite materials**. Printed in The Netherlands, Elsevier, 2001. 412 p.