ISSN 1809-5860

UMA FORMULAÇÃO INSERINDO AS LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS NA ANÁLISE INELÁSTICA POR ZONA PLÁSTICA

Arthur Ribeiro de Alvarenga[1]

Resumo

Neste artigo apresenta-se resumidamente uma formulação numérica voltada para a Análise Inelástica adotando Método da Zona Plástica incluindo o efeito das ligações semirrígidas, aplicada a pórticos planos de aço. Adotou-se a teoria de Bernoulli-Euler para desenvolvimento desse elemento finito no contexto da Técnica das Fatias usando o sistema Lagrangiano corrotacional atualizado. Indicam-se diferenças interessantes dessa aproximação em relação a outras existentes. Propõe-se o parâmetro índice de giro próprio da ligação ou de semiflexibilidade eta, que avalia melhor este comportamento. Essa formulação é validada agora estudando uma viga e uma coluna apresentando resultados adequados. Nestes estudos, verifica-se a resistência da viga avaliada no regime elástico. Também se avalia a flambagem elástica das colunas, tópico associado à Estabilidade e identificam-se aspectos contidos nas normas atuais. Esses exemplos são passos fundamentais para qualquer formulação garantir o seu posterior emprego em estudos mais complexos nesta pesquisa.

Palavras-chave: Elementos finitos. Método da Zona Plástica. Técnica das fatias. Ligações semirrígidas.

ONE FORMULATION INSERTING SEMI-RIGID CONNECTIONS INTO PLASTIC ZONE INESLASTIC ANALYSIS

Abstract

A new plastic-zone inelastic analysis formulation is presented, which includes the semi-rigid connections effect and it is applied to steel plane frames. The adopted finite element is from Bernoulli-Euler's theory and it uses the slices technique in an updated co-rotational Lagrangian system. This approximation differs from others because it has only one connection end node. A new parameter called semi-flexibility eta is proposed, for better evaluation of the connection own rotation and its behavior. Now a beam and two columns are studied for validation. The elastic buckling of the columns belongs to Stability field and some code requirements. These examples are basic steps to check any formulation and to follow on with more complex studies in this research.

Keywords: Finite elements. Plastic Zone Method. Slices Technique. Semi-rigid connections.

1 INTRODUÇÃO

A influência das ligações nas análises de estruturas metálicas é algo a muito estudado. Há quase um século, este assunto já era tratado por diversos pesquisadores (MORRIS e PACKER, 1987). Entretanto, nos últimos vinte anos, com o desenvolvimento da informática e de expressivos recursos computacionais, a semirrigidez voltou a ter maior enfoque tanto nas pesquisas como no projeto. Além disso, também entrou no espírito dos engenheiros e projetistas, chegando em definitivo às próprias normas (ECS/EUROCODE 3, 2005; ANSI/AISC 360-10, 2010).

[1] Doutor em Construções Metálicas - DECIV-Escola de Minas/UFOP, artalvarenga@ig.com.br

A inclusão do efeito da ligação tem como ponto de partida a necessidade da adaptação do conceito de um giro próprio de um conjunto de componentes, denominado genericamente por ligação, ao comportamento de uma viga ou peça à flexão, deixando-se de lado outras influências que possam estar presentes também. Ou seja, se determina um comportamento rotacional desse conjunto de componentes como sendo sua característica mais fundamental e introduz-se isso nas equações diferenciais das formulações das vigas.

Todavia, atualmente, tem-se o estudo do efeito localizado do painel na coluna deformando-se por causa da introdução desses esforços pela ligação (BAYO et al., 2006). Porém, este aspecto será abordado em outros artigos, considerando-se a ligação estudada só pelo giro entre os elementos dessas uniões (viga e coluna ou coluna e base).

Portanto, aquela aproximação de que o nó que une uma viga e uma coluna tem um mesmo giro para ambas as partes, supondo uma união infinitamente rígida (ou mesmo a outra abstração de que o giro na extremidade da viga poderia ser elevado e sem transmitir momento algum), é substituída agora por um comportamento mais real, que se difere desses extremos. Isso significa dizer que a ligação tem um comportamento rotacional próprio e independente.

Dispõe-se de vários modelos de introdução das ligações no contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo que isto surgiu empregando-se modelos elásticos, como os apresentados por MONFORTON e WU (1963). Posteriormente, os modelos foram aos poucos evoluindo para as análises inelásticas e atingiram até estruturas em 3D, embora a maioria dos ensaios experimentais ainda seja no plano e este é o contexto do que se apresenta aqui.

Por ser uma fonte de comportamento não linear, tornou-se natural que o seu estudo esteja ligado às áreas onde os efeitos de segunda ordem sejam significativos e onde a plasticidade deva ser considerada. Dessa forma, o seu efeito é mais observado quando se empregam análises inelásticas de segunda ordem, que englobam peças de alta responsabilidade e/ou de maior risco estrutural.

Alguns pesquisadores foram responsáveis pela introdução dos efeitos da ligação nas análises inelásticas de segunda ordem usando o conceito de rótula plástica (CHEN, 1988; CHEN et al., 1995). Destacam-se também os trabalhos que desenvolveram elementos finitos híbridos incluindo tanto a plasticidade, como também a ligação (YAU e CHAN, 1994; CHAN e CHUI, 2000).

No Brasil, outros pesquisadores acompanham de perto os passos dos supracitados, repetindo e adaptando a teoria já desenvolvida aos recursos e capacidades existentes, às vezes propondo melhorias, nessa área de pesquisa. Em geral, adotam também formulações que incorporam os efeitos de segunda ordem, plasticidade concentrada e ligações flexíveis. Partindo de modelos mais simples como os de SEKULOVIC e SALATIC (2001), atingiu-se um elemento finito composto mais completo (SANTOS et al., 2007; SILVA, 2009). Posteriormente, foram desenvolvendo outros elementos e chega-se a um Método da Compatibilidade de Deformações aplicado em estruturas mistas (MCD, LEMES et al., 2016), para a avaliação da resistência da seção baseando-se na relação momento-curvatura empregando uma rótula plástica, calibrada com elementos da Zona Plástica, semelhante à técnica das fatias. Isso foi indicado como etapas futuras em ALVARENGA (2010), embora essas formulações sigam passos similares a deste autor, na parte da teoria de Bernoulli-Euler.

Por outro lado, ACKROYD (1979) fez a introdução das ligações semelhante às formas adotadas posteriormente por CHEN et al. (1995), no contexto do Método da Zona Plástica, estudando a influência das ligações na deslocabilidade dos prédios, porém usando considerações simplificadoras do Método do Portal. Também FOLEY (2001) com aproximações similares e modelos mais completos 3D, estudou estruturas de edifícios de andares múltiplos com um grupo de computadores trabalhando em paralelo e um processo com vetorização, subestruturarão e condensação.

ALVARENGA (2005, 2010) tem procurado contribuir para obter um maior desenvolvimento e expansão do conceito da "Análise Avançada" apresentando resultados gabaritados. Deseja-se com esse conceito resolver problemas de banco de provas mais simples, usando o Método da Zona Plástica, de forma a obter maiores informações e entendimento, que possa assim gabaritar os modelos e a técnicas mais modernas, como as que já foram citadas.

Mas, para se atingir esse patamar, no âmbito da Análise Avançada, além de se considerar as imperfeições geométricas e tensões residuais — chamados genericamente de “aspectos importantes” (ALVARENGA, 2005) — deve-se introduzir o efeito das ligações. E esse passo exigiu então o desenvolvimento de um novo elemento finito, que atendesse às novas condições iniciais, previstas na formulação com a Técnica das Fatias (LAVALL, 1996) e que possa efetivamente ser empregado para essas análises com zona plástica, onde se supõe atingir resultados de elevada confiabilidade.

Existem hoje várias formulações de elementos finitos incorporando as ligações, porém falta uma similar relativa à Técnica das Fatias no contexto do Método da Zona Plástica. Este artigo traz um resumo do que se desenvolveu em ALVARENGA (2008, 2010), na sua fase mais fundamental (conceitos), incluindo-se outras contribuições, preenchendo uma parte dessa lacuna.

Na metodologia proposta, é necessário primeiramente avaliar as deformações e em seguida obter as tensões, para depois se obterem os esforços internos de equilíbrio. Assim, a relação momento-rotação, que é um dos dados ou condições de restrição na solução da análise, é avaliada posteriormente. A priori, o momento e a rotação são desconhecidos, sendo funções também do estado da seção. Embora a rotação seja obtida de uma forma direta através da solução do sistema de equações (isto é, dos deslocamentos), o momento é definido por uma integração de tensões em dada posição ao longo de fatias. Dessa forma as tensões residuais e a plasticidade interferem nos resultados. Percebe-se assim que algumas formulações existentes são incapazes de atender às condições necessárias para o objetivo proposto.

Toda formulação tem seus limites de aplicabilidade, bem como desafios e exigências para seu adequado emprego. Quando se desenvolveu a formulação agora apresentada, desconhecia-se o nível de requerimento computacional exigido para atingirem-se os bons resultados que outras formulações conseguem de uma forma mais direta. Isso fica evidente na solução de problemas simples, como os discutidos, por exemplo, na viga com duas ligações semirrígidas iguais nas extremidades (KOTLYAR, 1996). Porém, observou-se que a formulação proposta apresentou um desempenho bastante satisfatório na medida em que a não linearidade do problema aumentava, principalmente, com a perda de rigidez da ligação e a presença da plasticidade, justificando assim todo o trabalho desenvolvido.

Neste artigo apresentam-se os fundamentos da formulação proposta na próxima seção; já o elemento finito e as suas matrizes de rigidez estão na seção 3. O estudo da grandeza eta, que controla este EF, é realizado na seção 4. Três exemplos numéricos são apresentados e discutidos. Na conclusão são mostrados alguns comentários sobre esta formulação e os resultados obtidos.

2 MODELAGEM DA LIGAÇÃO

O primeiro passo no estudo do comportamento de uma ligação é definir que sendo sua rigidez R_k, quando nela se aplica um momento M_r, esta apresentará uma deformação por giro próprio α, de tal forma que é possível escrever simplificadamente:

$$R_k = M_r/\alpha \tag{1}$$

Neste instante se procura introduzir o conceito rotacional da ligação, sem se preocupar em como essa relação será descrita (relações lineares, equações, tabelas, etc.). Tampouco se entra no mérito do campo dos elementos finitos (EF) ou da parte numérica.

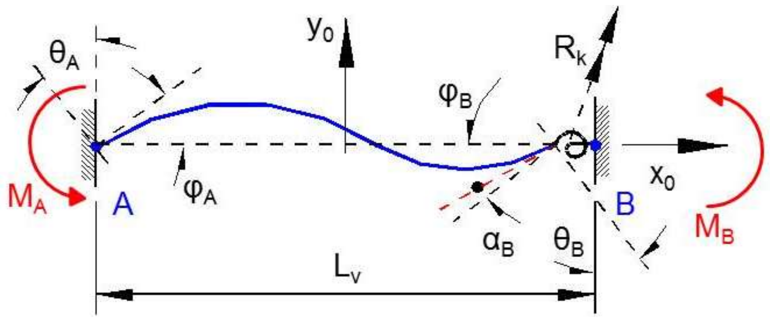


Figura 1 – Viga com ligação engastada (A) e flexível (B) nas extremidades.

Deseja-se apenas avaliar o que se sucede a uma viga (conjunto de EFs) que possui um apoio engastado (infinitamente rígido) à coluna na extremidade do lado A e uma ligação semirrígida (flexível) em outra do lado B. Acompanhando-se a Figura 1, ao considerarem-se os giros externos das colunas, ou externos da viga (θ_A, θ_B), e os giros correspondentes que ocorrem nas extremidades internas da viga (φ_A, φ_B), conclui-se que:

$$\theta_A = \varphi_A \quad \text{e} \quad \theta_B = \varphi_B + \alpha_B \tag{2.a/b}$$

Considerando o comportamento elástico linear da viga, os momentos atuantes nas suas extremidades M_A e M_B dependem das suas propriedades básicas e das rotações nas seções externas, obtendo-se (ignorando-se por enquanto a presença da ligação):

$$M_A = \frac{-EI_z}{L_V}\left(4\varphi_A + 2\varphi_B\right) \quad \text{e} \quad M_B = \frac{EI_z}{L_V}\left(2\varphi_A + 4\varphi_B\right) \tag{3.a/b}$$

sendo E o módulo de elasticidade, neste trabalho o do aço, I_z a inércia da seção da barra e L_v é o comprimento da viga.

Define-se o parâmetro g, empregado em vários estudos sobre ligações, que é a rigidez nodal (ou do extremo da viga), associando a rigidez elástica da viga E I_z/L_v com a da ligação R_k, ou seja:

$$g = \frac{EI_z}{R_k L_V} \tag{4}$$

Ao substituir a expressão das rotações internas (φ_A, φ_B) pelas correspondentes às rotações externas da viga, nas Eqs. (2.a/b), incluindo a contribuição da ligação com a Eq. (1) e considerando o parâmetro g como apresentado na Eq. (4), reescrevem-se as Eqs. (3.a/b) como apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{-4EI_z}{L_V}\left(\frac{1+3g}{1+4g}\right)\theta_A - \frac{2EI_z}{L_V}\left(\frac{1}{1+4g}\right)\theta_B \quad \text{e} \\ M_B &= \frac{EI_z}{L_V}\left(\frac{2\theta_A + 4\theta_B}{1+4g}\right) \end{aligned} \tag{5.a/b}$$

Essas equações tem origem em 1934 por Batho e Rowan, conforme MORRIS e PACKER (1987) e aparecem em vários textos sobre vigas com apoios rotacionais elásticos (MONFORTON e WU, 1963; KOTLYAR, 1996, etc).

3 ELEMENTO FINITO COM LIGAÇÃO FLEXÍVEL

No âmbito do MEF, é preciso enfatizar algumas necessidades e conceitos que são adotados pela Técnica das Fatias (LAVALL, 1996). Retorna-se ao conceito básico de que nesta aproximação, veja-se a Fig. 2.a, uma barra é representada por um conjunto de elementos finitos (EFs) que utilizam várias fatias longitudinais para se subdividir as seções extremas (Fig. 2b) e que se pretende avaliar o comportamento de cada fatia pelo comportamento do seu centroide, denominado fibra (Fig. 2.c). Simplificadamente: a fibra determina o comportamento da fatia, ou seja, daquele trecho de área dA da seção. Considerando o estado dessas fibras, ou das fatias, determinam-se as propriedades elastoplásticas e geométricas, integrando-se ao longo da área A. Com a formulação, chega-se às relações diferenciais que permitem obter os deslocamentos, a partir das matrizes de rigidez e dos esforços atuantes. As relações diferenciais permitem obter, através do campo de deslocamentos, as deformações e, a partir dessas, as tensões. Integrando-se essas tensões, ao longo da área A, obtêm-se os esforços internos do elemento. Condicionantes da teoria aplicada, como o referencial Lagrangiano atualizado, o sistema corrotacional com grandezas que relacionam deslocamentos efetivos (q_α), que produzem esforços (Q_α, α = 1 a 3) e as grandezas genéricas do sistema coordenado para o plano (p_j e P_j, j= 1 a 6), etc., tudo isso já foi apresentado anteriormente (ALVARENGA, 2005).

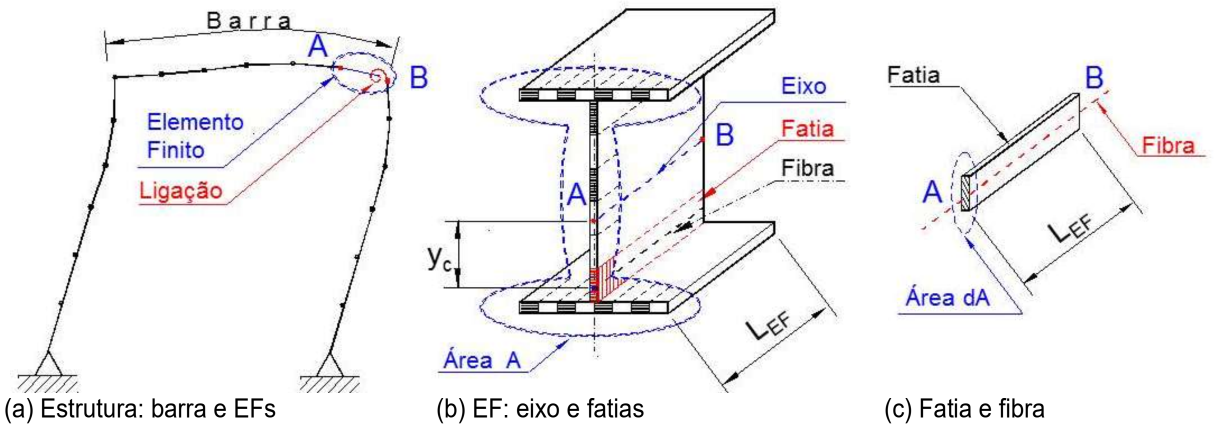
É necessário, entretanto, pela presença da ligação, entrar em alguns detalhes que diferem este artigo dos trabalhos anteriores. Inicia-se pelo fato de que o EF possui apenas uma ligação flexível em uma das extremidades, ou no nó A, ou no B (no caso das Figuras 1 e 2, essa ligação flexível se encontra no nó B). Em diversas formulações, há ligações nas duas extremidades do mesmo EF.

Na forma tradicional do MEF, o deslocamento axial é aproximado por uma reta ($u(x) = a\,x + b$) e o transversal por um polinômio do terceiro grau ($v(x) = c\,x^3 + d\,x^2 + e\,x + f$). Para a definição dessas constantes, são empregadas as condições de contorno: a) $u(x_A) = 0$ e $u(x_B) = \Delta x$ (alongamento), b) do EF corrotacional: $v(x_A) = v(x_B) = 0$; c) do EF com ligação se inclui a derivada segunda da função: $v''(x) = 6c\,x + 2d = -M(x)/(E\,Iz)$, com o que as Eqs. (5.a/b) são expressas agora em relação às rotações corrotacionais de deformação q_2 e q_3. As demais relações seguem o mesmo desenvolvimento das outras condições de extremidade (tipo rígido-rígido, rígido-rótula ou, do seu recíproco, rótula-rígido). Note-se que essas condições de borda são casos particulares do EF agora formulado e são obtidas quando se faz $g = \infty$ ou $g = 0$. Isso se estende a todas as equações apresentadas a seguir.

Substituindo-se os parâmetros envolvidos e empregando-se as condições de contorno, obtém-se o deslocamento v em função dos deslocamentos naturais q_1, q_2 e q_3, ou seja:

$$v(x) = \frac{(1+\ q_1/L_0)}{(1+4g)}\left\{\left[(1+2g)\left(\frac{x^3}{L_0^{\ 2}} - \frac{x}{4}\right) + (1+6g)\left(\frac{-x^2}{2L_0} + \frac{L_0}{8}\right)\right]q_2 + \left[\frac{x^3}{L_0^{\ 2}} + \frac{x^2}{2L_0} - \frac{x}{4} - \frac{L_0}{8}\right]q_3\right\} \tag{6}$$

lembrando que a primeira grandeza q_1 aparece tão somente como uma consequência da atualização do comprimento do EF (barra) em face de alguma deformação axial conjugada. Deve-se enfatizar que L_0 representa o comprimento original do EF (parte da barra) e que v(x) descreve o comportamento de um ponto do eixo (x) do EF selecionado, seguindo às hipóteses de Bernoulli-Euler.



(a) Estrutura: barra e EFs (b) EF: eixo e fatias (c) Fatia e fibra

Figura 2 - Conceitos da modelagem com o Método da Zona Plástica.

. Para simplificar os termos da função anterior, já que a grandeza g aparece tanto no numerador como no denominador comum, define-se a grandeza eta de acordo com:

$$\eta = \frac{2g}{(1+4g)} \tag{7}$$

Dessa maneira é possível obter v(x) apenas em função de x, das grandezas q_α e de η, chegando a partir disso, no campo de deformações ε desejado, expresso por:

$$\begin{aligned}\varepsilon = {} & \frac{q_1}{L_0} + \frac{1}{30}\left(1+\frac{q_1}{L_0}\right)\left[\left(2\eta^2+\eta+2\right)q_2^{\,2} + 2(2\eta-1)^2 q_3^{\,2} + (2\eta-1)(4\eta+1)\,q_2 q_3\right] \\ & \text{-}\, y_c\left\{\left[(1-\eta)\frac{6x}{L_0^{\,2}} - (1+\eta)\frac{1}{L_0}\right]q_2 + (1-2\eta)\left(\frac{6x}{L_0^{\,2}} + \frac{1}{L_0}\right)q_3\right\}\end{aligned} \tag{8}$$

em que a grandeza y_c representa a coordenada vertical de um ponto qualquer da seção em relação ao eixo do EF, como representado na Figura 2.b.

Diferenciando a Eq. (8), obtém-se a matriz de rigidez simétrica (sim.) elasto-plástica $\mathbf{K}_D$:

$$K_D = \begin{bmatrix} A & -B & -C & -A & B & D \\ & E & F & B & -E & G \\ & & H & C & -F & J \\ & & & A & -B & -D \\ & \text{sim.} & & & E & -G \\ & & & & & 2J \end{bmatrix} \tag{9}$$

com os termos dentro dos colchetes dados por:

$$\begin{aligned} & A = \frac{D_{1m}}{L_0}, \quad B = \frac{3\eta\, D_{2m}}{L_0 L_d}, \quad C = \frac{(1+\eta)\, D_{2m}}{L_0}, \quad D = \frac{(1-2\eta)\, D_{2m}}{L_0}, \\ & E = \frac{12\left(1-3\eta+3\eta^2\right) D_{3m}}{L_0 L_d^{\,2}}, \quad F = \frac{6\left(1-2\eta+2\eta^2\right) D_{3m}}{L_0 L_d}, \\ & G = \frac{6(1-2\eta)^2 D_{3m}}{L_0 L_d}, \quad H = \frac{4\left(1-\eta+\eta^2\right) D_{3m}}{L_0} \quad \text{e} \quad J = \frac{2(1-2\eta)^2 D_{3m}}{L_0}. \end{aligned} \tag{10.a-i}$$

Já a matriz relacionada com a curvatura $\mathbf{K}_H$ (efeito secundário Pδ) é definida a seguir:

$$K_H = \frac{Q_1}{30 L_0}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M & N & 0 & -M & P \\ & & R & 0 & -N & S \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & M & -P \\ & & & & & T \end{bmatrix} \tag{11}$$

na qual se têm os seguintes termos:

$$\begin{aligned} & M = 6\left(1-3\eta+6\eta^2\right), \quad N = 3\left(1+4\eta^2\right)L_d\,, \quad P = 3\left(1-6\eta+8\eta^2\right)L_d, \\ & R = 2\left(2+\eta+2\eta^2\right)L_d^{\,2}, \quad S = -\left(1+2\eta-8\eta^2\right)L_d^{\,2} \quad \text{e} \quad T = 4(1-2\eta)^2 L_d^{\,2}. \end{aligned} \tag{12.a-f}$$

As grandezas D_{1m}, D_{2m} e D_{3m} são as propriedades geométricas elasto-plásticas da seção. Como o problema é não linear, adota-se o processo incremental-iterativo de solução de Newton-Raphson, no qual essas matrizes são corrigidas a cada instante, a partir da atualização dessas propriedades, que no regime elástico são os valores EA, ES (= 0) e EI_z. Note-se que, em geral, no regime inelástico, o CG da seção remanescente elástica está fora do eixo do EF. Portanto, o momento estático S, geralmente desprezado nos cálculos elásticos e ignorado em diversos trabalhos com modelos inelásticos, deixa de ser nulo. Outro destaque é a presença do comprimento corrigido do EF L_d e, também, o esforço axial corrotacional Q_1.

Lembrando também que a matriz de rigidez geométrica relativa ao efeito de giro de corpo rígido $\mathbf{K}_G$ (relacionada aos efeitos secundários PΔ e Mφ) independe das condições de borda (da ligação), se mantém a mesma:

$$K_G = \begin{bmatrix} 0 & U & 0 & 0 & -U & 0 \\ & V & 0 & -U & -V & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & U & 0 \\ & \text{sim.} & & & V & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

tendo os termos calculados pelas relações:

$$U = (Q_2 + Q_3)\ /L_d^2 \quad \text{e} \quad V = Q_1/L_d. \tag{14.a/b}$$

Por fim, menciona-se que os esforços internos resultantes são obtidos também através de integração das tensões nas fatias ao longo das seções inicial e final do EF, de área A, e também independe das condições de borda, como já mostrado anteriormente, isto é:

$$Q_1 = \text{IIEA}(N_A = N_B) \tag{15}$$

em que IIEA representa a Integração Iterativa do Esforço Axial (ALVARENGA, 2008), ou seja, um processo numérico para compatibilizar as tensões axiais devido ao escoamento. O esforço axial N_j, com j sendo o nó A ou B, é encontrado através da expressão:

$$N_j = \int_A \sigma\, dA = \sum_{i=1}^{n\ \text{fatias}} [\sigma_i\, dA_i] \tag{16.a/b}$$

Já os momentos $Q_2 = -M_A$ e $Q_3 = M_B$ são encontrados por:

$$M_j = \int_A \sigma\, y_c\, dA = \sum_{i=1}^{n\ \text{fatias}} [\sigma_i\, y_{ci}\, dA_i] \tag{17.a/b}$$

4 PARÂMETRO SEMIFLEXIBILIDADE DA LIGAÇÃO ETA

As formulações numéricas desenvolvidas para aproximar o comportamento de estruturas com ligações semirrígidas empregam usualmente um determinado parâmetro que avalia a rigidez (ou flexibilidade) de cada conexão. Existem várias formas de se avaliar e exprimir esse parâmetro. O chamado índice de fixação γ, por exemplo, proposto inicialmente por MONFORTON e WU (1963), é um desses parâmetros, dado por:

$$\gamma = q/(1 + cg) \tag{18}$$

sendo a constante c considerada igual a 4 para esses pesquisadores. Este índice γ com o valor da "rigidez máxima da viga $4EI_z/L_v$" foi empregado em vários trabalhos, com destaque para AL-BERMANI e KITIPORNCHAI (1992). Já outros pesquisadores usaram a "rigidez mínima da viga $3EI_z/L_v$", isto é, com c = 3. Nesse caso tem-se uma parcela maior de adeptos, pode-se citar: ACKROYD (1979), CHAN e CHUI (2000), SEKULOVIC e SALATIC (2001) e SANTOS et.al. (2007).

Já o parâmetro semiflexibilidade η agora proposto é relacionado com a rigidez nodal g da ligação da seguinte forma:

$$g = \eta/[2(1 - 2\eta)] = (1 - \gamma)/3\gamma \tag{19.a/b}$$

Observe-se os limites $0 \leq g \leq \infty$, quando $g \rightarrow \infty$ para o caso de apoio rotulado e $g = 0$ para o caso rígido, o índice de fixação γ possui o intervalo 0 a 1 para esses tipos de apoios, respectivamente. Já o índice de semiflexibilidade η possui um intervalo de 0,5 (apoio rotulado) a 0 (apoio rígido), mas inexiste correlação entre os valores intermediários.

Pode-se então definir o fator de flexibilidade ff de cada ligação, como sendo a relação entre a flexibilidade da viga (barra à flexão) como um todo, dada por $L_v/(4EI_z)$ e da flexibilidade da ligação (inverso da rigidez R_k), pela expressão:

$$ff = \frac{L_v}{4EI_z} + \frac{1}{R_k} = \frac{4g}{1+4g} = 2\eta \qquad (20.a\text{-}c)$$

A grandeza η representa a metade de ff, mas tem um sentido particular também. Veja-se que ao definir o EF que contém essa ligação, cuja extensão deve ser menor ou igual a $L_v/2$ (já que a barra teria no mínimo 2 EFs), haverá um ponto de mudança da curvatura, que pode estar no interior desse EF, no caso dessa ligação ser rígida. Porém, no caso de ligação rotulada, inexiste tal mudança de curvatura. Portanto, o valor intermediário ff = 0,5; ou a semiflexibilidade (η = 0,25) representa uma transição entre os dois casos, uma redução na distância da barra sujeita à curvatura oposta. Quando ff > 0,5 (η > 0,25) uma curvatura é dominante; já no caso contrário, pode ocorrer uma mudança de curvatura significativa, o que também interfere nas equações já mostradas anteriormente. Mas isso depende também da dimensão do EF em relação à barra (viga). Assim, este parâmetro também avalia o comportamento da curvatura na barra e no EF. A adoção da semiflexibilidade η justifica-se porque as equações ficam mais simples (compactas).

Além disso, veja-se que o valor de g, de acordo com a Eq. (4), pode ser calculado com o comprimento da barra (L_v) ou com o comprimento do EF g_{EF} (L_{EF}), em qualquer formulação existente. Assim, existem duas grandezas eta: a calculada com g considerando L_v, que aqui se indica η mesmo; e a relativa ao EF η_{EF}, obtida através de g_{EF} considerando L_{EF}. Deve-se definir qual dos valores de eta (η, η_{EF}) obtidos com g e g_{EF}, respectivamente, deve se empregar em cada parte do processo de solução. Foram reproduzidos e analisados alguns resultados numéricos corretos (ou coerentes), para se chegar às conclusões indicadas em ALVARENGA (2010). Ao montar-se a matriz de rigidez do elemento e avaliarem-se suas propriedades, o valor de eta a ser adotado é o global η, relacionado ao comprimento L_v (da barra). Porém, ao avaliarem-se os esforços internos do EF, determinado a partir das deformações decorrentes, o que interessa é a função de interpolação local, no eixo corrotacional do EF, e, portanto, deve-se empregar o valor de eta associado ao comprimento do EF, η_{EF}, que tende a ser bem maior (mais flexível).

Outra relação importante é o ângulo de giro próprio da ligação α, já definido antes pela Eq. (1), agora escrito em relação às grandezas corrotacionais, sendo para a ligação em B:

$$\alpha = \eta(q_2 + 2q_3) \qquad (21)$$

Quando a ligação é rígida (η = 0) então α = 0, como esperado. Por outro lado, na condição de rótula (η = 0,5) tal rotação será $q_2/2$ somado a qualquer rotação q_3 que ocorra na extremidade B. Já que é rótula, qualquer rotação q_3 pode haver, sem provocar esforço algum, ou seja, é apenas um giro da rótula. De fato, como $q_3 = \theta_B - \alpha = 0 - (q_2/2) = -q_2/2$, isto é o giro da rótula se nenhuma outra rotação (θ_B) ocorrer. Assim, é correto denominar esse parâmetro η como "índice da rotação própria da ligação" e o ângulo α define o comportamento da ligação, daí sua importância e destaque no presente artigo. Note-se que por α se determinará o caminhamento na curva momento rotação que descreve melhor a ligação, chamada aqui de M-teta. Ou seja, o ângulo α é a rotação teta da ligação (M-alfa).

O emprego dos dois valores de eta na solução e o seu significado, enfatiza os desafios naturais de se desenvolver uma nova abordagem numérica. Em outras formulações mais simples, os momentos e as rotações são obtidos diretamente, enquanto a que se apresenta agora, requer algumas iterações para se atingir o mesmo resultado, como mostrado na Tabela 1.

5 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

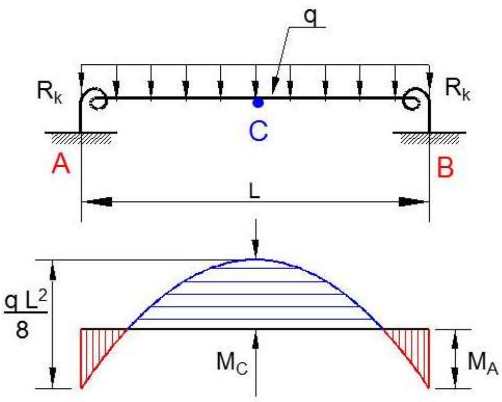
A seguir, são apresentados três exemplos de barras simples com ligações semirrígidas, em regime elástico, para se validar a formulação proposta e as implementações computacionais realizadas. O primeiro exemplo aborda uma viga com ligações flexíveis sujeita a uma carga distribuída; o outro analisa a carga de flambagem elástica de uma coluna biapoiada para alguns valores do parâmetro η. O último trata da mesma coluna anterior, porém com a condição deslocável horizontalmente para o apoio superior.

5.1 Viga com ligações flexíveis

Conforme a Figura 3, estuda-se uma viga com duas ligações nas extremidades, de mesma rigidez constante e sujeita a uma carga q distribuída aproximada por cargas nodais P_0 e P_0'. Adotou-se um perfil soldado nacional, compacto, sendo a análise realizada no regime elástico. Deseja-se determinar qual a ligação (ou rigidez R_k) permite o melhor aproveitamento dessa viga.

Segundo KOTLYAR (1996), o momento na extremidade com ligação M_A é dado por:

$$M_A = \frac{M_{rígido}}{(1+2g)} = M_{rígido}\frac{(1-2\eta)}{(1-\eta)} \qquad (22a/b)$$



Dados:
vão: L = 800 cm
malha: 8 EF (100 cm cada)
seção: I 400 × 150 × 15 × 8
material: aço (F_y = 25 kN/cm²)
Elasticidade: E = 20000 kN/cm²
Rigidez: $R_k = [(2 - 4\eta)/\eta](E\,I_z/L)$
$0{,}0 \leq \eta \leq 0{,}5$ (linear)
$q = \lambda\, q_0 \qquad 0 \leq \lambda \leq 100\%$
q_0 = 40 kN/m (= $7P_0 + 2P_0'$)
P_0= 40 kN (típ.) P_0'= 20 kN (A/B)

Figura 3 – Viga com ligação semirrígida sujeita a uma carga distribuída q aproximada.

Tabela 1 – Resultados obtidos para uma viga com ligação semirrígida sujeita à carga distribuída q.

η	g	R_k (kNm/rad)	**Momentos** (kNcm) M_A	M_C	θ_A (mrad)	y_C (cm)	**Número de iterações**
0,000	0,0000	∞	21000	11000	0,00	1,064	5
0,010	0,0051	982784	20787	11212	0,21	1,106	7
0,050	0,0278	180540	19895	12105	1,10	1,284	13
0,100	0,0625	80242	18666	13333	2,33	1,529	18
0,150	0,1071	46808	17293	14705	3,70	1,803	20
0,200	0,1667	30090	15749	16250	5,23	2,110	21
0,250	0,2500	20060	13999	17999	6,98	2,243	19
0,300	0,3750	13374	11999	19999	8,97	2,858	16
0,333	0,5000	10030	10499	21499	10,47	3,157	13
0,350	0,5833	8597	9692	22306	11,27	3,318	12
0,400	1,0000	5015	6999	24998	13,96	3,855	8
0,450	2,2500	2229	3818	28178	17,13	4,489	6
0,499	124,750	40	84	31911	20,85	5,234	5
0,500	∞	0	0	31995	20,35 (2)	5,250	5

Obs. 1. EI_z/L_v = 5015 kNm/rad = R_k (g =1); 2. valor teórico é θ_A = 21,27 mrad.

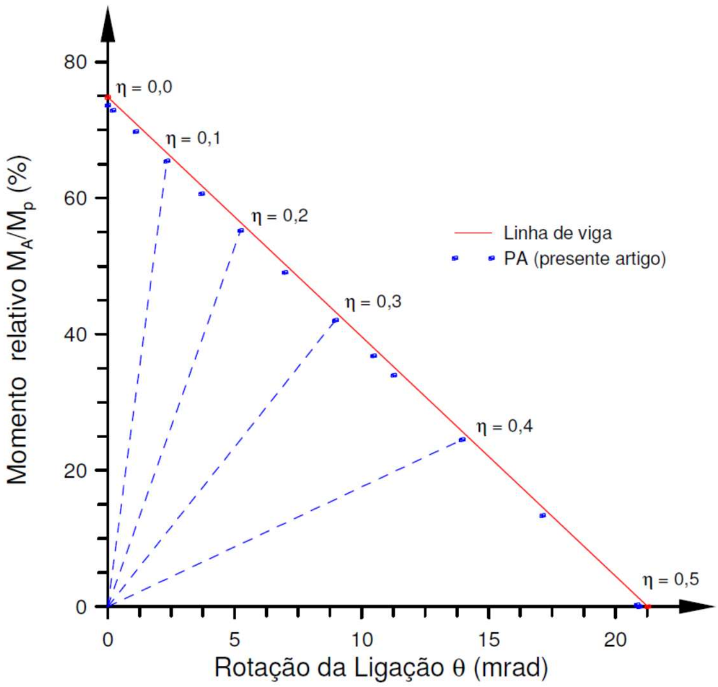


Figura 4 – Avaliação da Linha de Viga.

sendo $M_{rígido}$ o de engaste perfeito ($qL_v^2/12$). Neste exemplo, a rigidez da ligação semirrígida R_k é expressa como função do parâmetro de semiflexibilidade η.

Na Tabela 1 indica-se o momento no apoio M_A, sua rotação θ_A, o momento no meio vão da viga M_C e sua flecha y_C, obtidos no presente trabalho, para os diversos valores da grandeza η (considerou-se as ligações como idênticas). Esses resultados foram obtidos adotando-se um modelo com 8 EFs. Tomando-se como referência momento plástico da seção da viga (tensão de escoamento f_y = 25 kN/cm^2) M_p = 28.501 kNcm, avalia-se então o desempenho dessas ligações. No caso de apoios rotulados (η = 0,5; última linha), por exemplo, o momento fletor avaliado no centro da viga foi 31995 kNcm, que é bem próximo do valor 32000 kNcm teórico (= $qL_v^2/8$).

Os demais resultados também mostraram boa concordância com obtidos empregando-se as fórmulas, com os momentos de apoio calculados pelas Eqs. (22). Note-se a quantidade de iterações necessárias em um passo de incremento. Há diferenças provocadas pela aproximação da carga.

Idealizada por Batho e Rowan conforme MORRIS e PACKER (1987), a Linha de Viga, é construída utilizando-se dois pontos: a) para rotação zero no apoio (θ_A= 0), tem-se o momento de engaste perfeito $M_A = qL_v^2/12$; b) para o momento fletor nulo (viga biapoiada, M_A = 0) obtém-se a rotação máxima da extremidade $EI_z\ \theta_A = qL_v^3/48$. Na Figura 4 do presente artigo (PA), indicam-se os pontos correspondentes aos diversos valores do parâmetro de semiflexibilidade η, comprovando-se a coerência dos resultados produzidos com esta formulação.

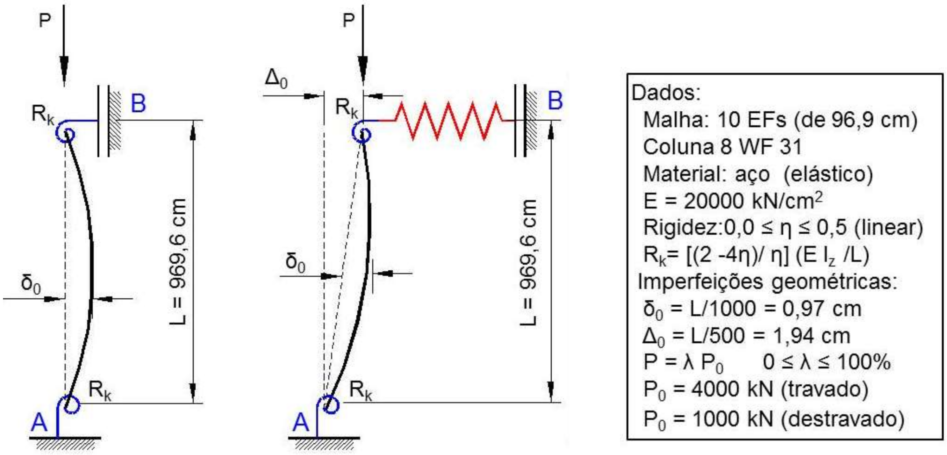
Como esperado, verifica-se que a viga biengastada fornece a seção transversal mais leve para este problema, porém trata-se da ligação mais cara. Todavia, pode-se usar essa mesma seção com uma ligação semirrígida, com η = 1/3, na qual o momento máximo ($qL_v^2/12$) ocorreria agora no meio do vão. Nesse caso a ligação semirrígida receberia metade do momento anterior, ficando mais barata. A possível desvantagem dessa escolha seria a flecha, caso limitada a $y_C \leq L_v/360$ = 2,22 cm (aqui não se reduziu o fator de majoração das cargas). Pode-se ainda usar outra ligação semirrígida tal que os momentos nos apoios e no meio do vão sejam próximos ($M_A \approx M_C$), usando η = 0,20; obtendo-se uma flecha de y_C = 2,11 cm, que é adequada. Como mostrou KOTLYAR (1996), essa é uma das justificativas de se adotar as ligações semirrígidas em projetos. Esta análise é bastante simplificada. Para um uso prático, dever-se-á considerar os fatores de majoração da carga (em condições últimas, momentos) e os de utilização (para deslocamentos, flechas).

5.2 Flambagem elástica da coluna biapoiada travada

Deseja-se comprovar que a formulação numérica proposta pode ser usada para analisar o problema de estabilidade elástica de colunas com diversas condições de borda, incluindo os casos extremos (coluna biengastada e biapoiada), modificando-se apenas o parâmetro η. Na Figura 5.a apresenta-se a coluna travada a ser avaliada, com os dados indicados na Figura 5.c.

Adotou-se uma imperfeição inicial de amplitude δ_0 = L/1000 e um modelo com 10 EFs. Colocou-se também a carga de referência P_0 = 4000 kN, como forma de comprovar o valor teórico máximo atingido com K = 0,5 (ligações rígidas), P_{cr} = 3.884 kN, que fornece o fator de carga crítica λ_{cr} = 3884 / 4000 = 97,1%. Para K =1 (ligações rotuladas), tem-se a carga de flambagem de Euler P_e = 961 kN, sendo então λ_e = 24,0%. Note-se que neste caso, o fora de prumo Δ_0 inexiste nessa análise.

Na Tabela 2, indicam-se os valores dos comprimentos efetivos K e das cargas de flambagem P_{PP} obtidas através do programa computacional desenvolvido.



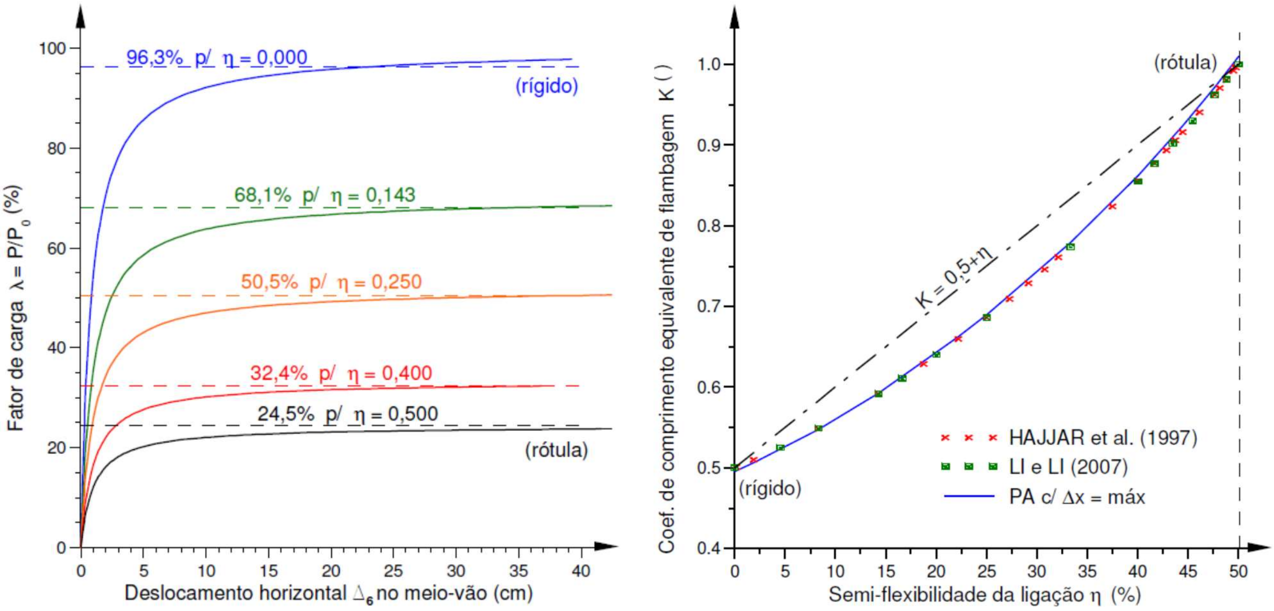
(a) Coluna travada, (b) Coluna destravada, (c) Dados das colunas.

Figura 5 – Coluna biapoiada travada e móvel com duas ligações semirrígidas.

Tabela 2 – Cargas críticas da coluna biapoiada travada, com ligações semirrígidas.

Parâmetros da Ligação		**LI e LI (3) (2007)**		**HAJJAR et al. (1997)**			**PA**			
η	**g**	**k_1 = k_2 (4)**	**K_{teor}**	**G_A = G_B = 2g**	**K**	**P_{cr} (6) (kN)**	**λ (%)**	**P_{PP} (7) (kN)**	**K**	**Δ_6 (8) (cm)**
0,000	0,000	∞	0,500	(1) 0,000	0,5000	3844,0	97,85	3914,0	0,4955	40,0
0,001	0,001	-	-	0,002	0,5010	3828,6	97,43	3897,2	0,4966	=
0,019	0,010	-	-	0,020	0,5100	3694,9	93,73	3749,2	0,5063	=
0,083	0,050	10,00	0,549	0,100	0,5487	3191,9	80,14	3205,6	0,5475	=
0,143	0,100	5,00	0,592	0,200	0,5919	2742,7	68,37	2734,8	0,5928	=
0,222	0,200	-	-	0,400	0,6598	2207,4	54,70	2188,0	0,6627	=
0,250	0,250	2,00	0,686	0,500	0,6863	2040,5	50,50	2020,0	0,6897	=
0,333	0,500	1,00	0,774	1,000	0,7743	1603,1	39,58	1583,2	0,7791	40,0
0,400	1,000	0,50	0,855	2,000	0,8553	1313,7	32,35	1294,0	0,8618	37,6*
0,444	2,000	-	-	4,000	0,9156	1146,2	28,16	1126,4	0,9237	35,2*
0,476	5,000	0,10	0,962	10,00	0,9625	1037,3	25,47	1018,8	0,9712	34,4*
0,488	10,000	0,05	0,981	20,00	0,9805	999,6	24,52	980,8	0,9899	33,6*
0,499	100,00	-	-	200,00	0,9980	964,9	23,67	946,8	1,0070	33,6*
0,500	∞	0,00	1,000	(2) ∞	0,9996	(5) 961,7	23,58	943,2	1,0090	33,6*

Obs.: 1. caso biengastado; 2. birrotulado; 3. coeficientes (k_1, k_2) originais de LI e LI (2007); 4. $k_1 = 1/G_A$, $k_2 = 1/G_B$; 5. $P_e = \pi^2 EI_Z / L^2$ = 961 kN; 6. carga crítica $P_{cr} = P_e / K^2$; 7. $P_{PP} = \lambda P_0$, P_0 = 4000 kN; 8. deslocamento correspondente, * limitado à rotação máxima da ligação adotada $\theta_{A/B}$ = 120 mrad.



(a) Trajetórias de equilíbrio (b) Coeficientes de comprimento efetivo K

Figura 6 – Carga de flambagem para a coluna travada de HAJJAR et al. (1997).

Nessa mesma tabela estão os valores de K e cargas críticas P_{cr} calculadas pelas equações transcendentais (condensadas no famoso ábaco de Lawrence e Oliver em 1953) indicadas por HAJJAR et al. (1997), adotando-se a rigidez do nó $G_A = G_B = 2g$ para estruturas travadas. Esses valores são também comparados com os teóricos K_{teor} fornecidos por LI e LI (2007).

Na Figura 6.a ilustram-se as trajetórias de equilíbrio encontradas para se chegar às cargas de flambagem elásticas apresentadas na Tabela 2. O controle incremental adotado foi o de deslocamento horizontal Δ_6 do nó central (6) atingindo um valor máximo de 40,0 cm; o que permite outra definição do valor de λ. Na sua tese, Alvarenga (2010) limitou a tensão máxima à de ruptura do aço, obtendo coeficientes K mais próximos dos valores teóricos indicados. Nas ligações mais flexíveis, a rotação da ligação é limitada a 120 mrad e, com isso, o deslocamento Δ_6 atinge no máximo 33,6 cm. São apresentados os coeficientes de flambagem K obtidos por HAJJAR et al. (1997), LI e LI (2007) e pelo presente trabalho para os diferentes valores do índice de semiflexibilidade da ligação η, na Figura 6.b. Grosseiramente, pode-se dizer que $K \approx 0{,}5(1+2\eta) = 0{,}5+\eta$.

Através dessas figuras e da tabela comprova-se a boa concordância entre os resultados deste trabalho e aqueles extraídos da literatura internacional.

5.3 Flambagem elástica da coluna biapoiada móvel

Agora a mesma coluna do exemplo anterior é estudada, modificando-se o apoio superior que passa a ser móvel (deslocável) na direção x, como se representa na Figura 5.b. A carga aplicada é P_0 = 1000 kN. Controlou-se o deslocamento horizontal do nó da extremidade superior (no topo, nó 11), que é livre, mas impedido de girar por causa da rigidez da ligação. Esse deslocamento Δ_{11} varia de 114 cm até 106 cm para ligação do tipo flexível ($\eta \geq 0{,}45$), atendendo à rotação limite (120 mrad). Aqui se considerou também a condição de fora de prumo (FP) da norma $\Delta_0 = L/500$, além da mesma curvatura anterior. Na modelagem, isso é feito transladando nó a nó, o deslocamento já inserido da curvatura (δ_i) pela soma da parcela proporcional $\Delta_i = y_i\, \Delta_0/L$.

Essa coluna comporta-se como a destravada dos ábacos, adotando-se então a rigidez do nó $G_A = G_B = 6g$ para se determinar a carga crítica (HAJJAR et al., 1997). As cargas críticas P_{cr} e os coeficientes K e K_{teor} são listados na Tabela 3, embora este valor seja indefinido para a condição de rótula ($K = \infty$), caso que é hipostático.

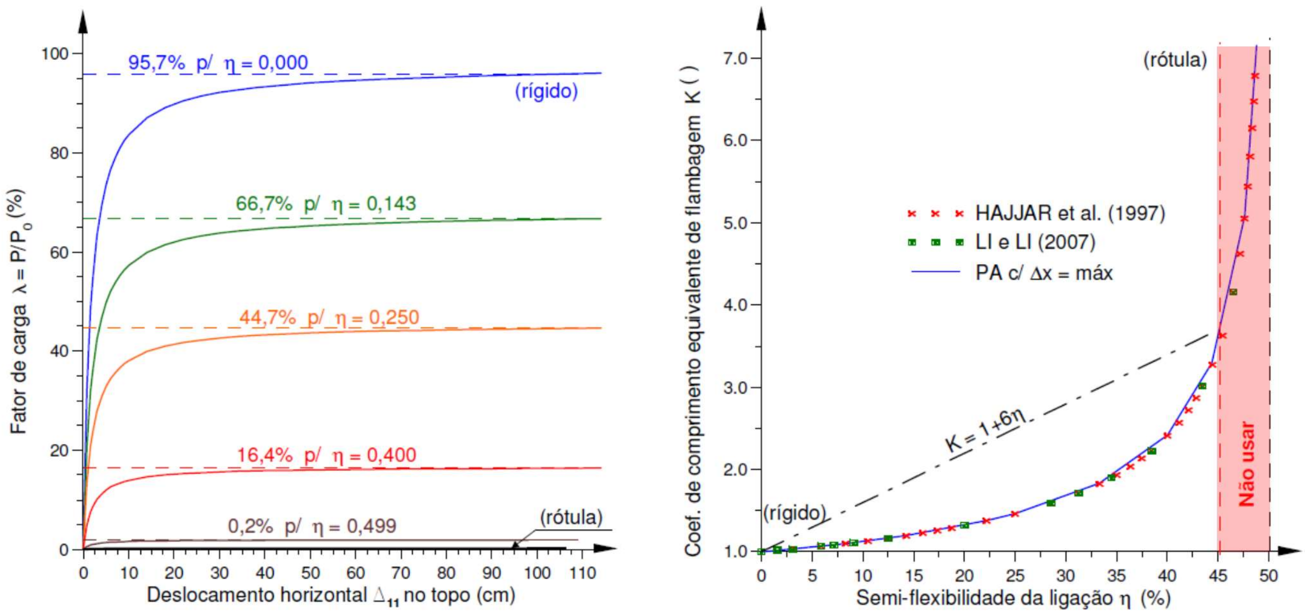
As trajetórias de equilíbrio indicadas na Figura 7.a elucidam o comportamento da ligação mais rígido ou a quase incapacidade de carga, quando a mesma se torna flexível (próximo do que seria a rótula teórica), com elevados deslocamentos quando se atinge a carga crítica.

Os coeficientes de flambagem K obtidos por HAJJAR et al. (1997), K_{teor} por LI e LI (2007) e neste trabalho para as diferentes semiflexibilidades η são representados na Fig. 7.b. Até o valor $\eta \leq 0{,}35$ o coeficiente é $K \leq 2$, para este exemplo. A partir daí, comprova-se que a ligação se torna flexível e K cresce rapidamente. Na medida em que eta tende a 0,5; o coeficiente K se torna infinito, coerente com a instabilidade (capacidade zero). O autor recomenda que no máximo $\eta \leq 0{,}45$ do ponto de vista prático. Grosseiramente, pode-se escrever $K \approx 1+6\eta$. Note-se que essas aproximações exageradas lembram os coeficientes G (2g para coluna travada e 6g destravada) adotados.

Tabela 3 – Cargas críticas da coluna biapoiada móvel, com ligações semirrígidas.

Parâmetros da Ligação		**LI e LI (3) (2007)**		**HAJJAR et al. (1997)**			**PA**			
η	**g**	**$k_1 = k_2$ (4)**	**K_{teor}**	**$G_A = G_B = 6g$**	**K**	**P_{cr} (6) (kN)**	**λ (%)**	**P_{PP} (7) (kN)**	**K**	**Δ_{11} (8) (cm)**
0,0000	0,000	∞	1,00	(1) 0,000	1,000	(5) 961,0	96,1	960,6	1,000	114,0
0,0002	0,001	20,000	1,02	0,006	1,002	957,2	95,7	956,6	1,002	=
0,0192	0,010	10,000	1,03	0,060	1,020	923,6	92,2	922,3	1,021	=
0,0833	0,050	3,000	1,11	0,300	1,099	795,2	79,1	791,3	1,102	=
0,1428	0,100	2,000	1,16	0,600	1,196	672,3	66,7	667,1	1,200	=
0,2222	0,200	1,000	1,32	1,200	1,375	508,2	50,3	502,8	1,383	=
0,2500	0,250	0,500	1,59	1,500	1,459	451,7	44,7	446,5	1,467	=
0,3333	0,500	0,300	1,90	3,000	1,826	288,3	28,4	284,5	1,837	=
0,4000	1,000	0,200	2,23	6,000	2,405	166,2	16,4	163,9	2,421	=
0,4444	2,000	0,100	3,01	12,00	3,272	89,8	8,85	88,5	3,295	114,0
0,4760	5,000	0,050	4,16	30,00	5,050	37,7	3,71	37,1	5,089	106,0*
0,4878	10,000	–	–	60,00	7,083	19,1	1,88	18,8	7,150	106,0*
0,4999	100,00	–	–	600,00	22,240	1,9	0,19	1,9	22,48	106,0*
0,5000	∞	0,000	∞	(2) ∞	∞	0,0	0,00	0,0	∞	–

Obs.: 1. caso biengastado; 2. birrotulado; 3. coeficientes (k_1, k_2) originais de LI e LI (2007); 4. $k_1 = 1/G_A$, $k_2 = 1/G_B$; 5. $P_e = \pi^2 EI_Z / L^2 = 961$ kN; 6. carga crítica $P_{cr} = P_e / K^2$; 7. $P_{PP} = \lambda P_0$, $P_0 = 1000$ kN; 8. deslocamento correspondente, * limitado à rotação máxima da ligação adotada $\theta_{A/B} = 120$ mrad, recomenda-se evitar.



(a) Trajetórias de equilíbrio (b) Coeficientes de comprimento efetivo K

Figura 7 – Carga de flambagem para a coluna biapoiada móvel de HAJJAR et al. (1997).

6 CONCLUSÕES

Diferentemente de outras formulações, a apresentada neste trabalho incorpora a técnica de modelagem numérica onde as barras são conjuntos de EFs. Com isso, diversas possibilidades de análise aparecem, pelo acesso a informações no interior da barra.

Comprova-se que os resultados obtidos estão de acordo com a teoria, nos casos de ligações lineares e modelos elásticos. A solução exige um processo iterativo pelo próprio comportamento da ligação, bem como, pelo fato dos deslocamentos (rotações) e esforços (momentos) serem obtidos de forma diferente, o primeiro pelo sistema de equações e o último por integração de tensões.

Algumas equações grosseiras foram indicadas para uso numa verificação expedita, para um lançamento arquitetônico ou anteprojeto, por exemplo.

Este artigo cumpre uma primeira etapa que pode também ser usada por outras formulações, para comprovar a sua capacidade e adequação. Em artigos vindouros, o comportamento inelástico com zona plástica será estudado complementando a sua validação.

7 AGRADECIMENTOS

O autor é grato aos órgãos de fomento da pesquisa: CAPES (pela bolsa pós-doc deste), ao CNPQ e FAPEMIG, que colaboraram com os projetos de pesquisa do prof. Ricardo A. M. Silveira que inclui estudantes do programa de pós-graduação PROPEC da UFOP/MG. Agradece ainda a este orientador, pelo apoio e encorajamento para a produção independente do presente artigo.

8 REFERÊNCIAS

ACKROYD, M. H. **Nonlinear inelastic stability of flexibly-connected plane steel frames.** PhD Thesis. (Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering), Univ. Colorado, Boulder, 312 p.,1979.

AL-BERMANI, F. G. A.; KITIPORNCHAI, S. Elastoplastic nonlinear analysis of flexibly jointed space frames. **ASCE J. Structural Engineering**, v. 118, n.1, p. 108-125, 1992. ISSN: 0733-9445.

ALVARENGA, A. R. **Aspectos importantes na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço**. 2005. 303 p. Dissertação (Mestrado em Construção Metálica, PROPEC), DECiv. EM-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto/MG, 2005.

ALVARENGA, A. R. **Estudos sobre ligações com análise avançada através da zona plástica de porticos planos de aço**. 2008. 235 p. Qualificação / Relatório (Doutorado em Construção Metálica, PROPEC), DECiv. EM-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto/MG, 2008.

ALVARENGA, A. R. **As ligações semirrígidas na análise avançada com zona plástica de portais planos de aço**. 2010. 481 p. Tese (Doutorado em Construção Metálica, PROPEC), DECiv. EM-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto/MG, 2010.

AMERICAN NATIONAL STANDARDS/ AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUTION, Specification for structural steel buildings. **ANSI/AISC 360-10**. 552 p., 3 ed., 2013. Chicago/IL, 2010.

BAYO, E.; CABRERO, J. M.; GIL, B. An effective component-base method to model semi-rigid connections for the global analysis of steel and composite structures. **Engineering Structures**, v. 38, p. 97-108, Jan., 2006. ISSN: 0141-0296.

CHAN, S. L.; CHUI, P. P. T. **Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections.** Elsevier Applied Science, 2000, 336 p. eBook ISBN: 9780080537719.
CHEN, W. F. **Steel beam-to-column connections.** Elsevier Applied Science, 1988, 482 p. ISBN: 1851662251.

CHEN, W. F.; GOTO, Y.; RICHARD LIEW, J. Y. **Stability design of semi-rigid frames.** John Wiley and Sons, 1995, 488 p. ISBN: 9780471076704.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. Design of steel structures. ECS/EUROCODE 3 Part 1 – English version. **ENV 1993 – 1 – 1 E.** 91 p. Bruxelas, Bélgica. Versão "draft" 2005.

FOLEY, C. M. Advanced analysis of steel frames using parallel processing and vectorization. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Eng.**, v. 16, n. 5, p. 305-325, Set/2001. ISSN: 14678667.

HAJJAR, J. F. et al., Task Committee 23. **ASCE - Effective length and notional load approaches for assessing frames stability – Implications for American steel design.** 1997, 450 p. ISBN: 9780784402306.

KOTLYAR, N. Formulas for beams with semi-rigid connections. **AISC Engineering J.**, v. 4/4, n. 33, p. 142-146, 1996. ISSN: 00138029.

LAVALL, A. C. C. **Uma formulação teórica consistente para a análise não linear de pórticos planos pelo método dos elementos finitos considerando barras com imperfeições iniciais e tensões residuais na seção transversal.** 1996. 264 p. Tese (Doutorado em Eng. de Estruturas) Esc. Eng. de São Carlos, Univ. de São Paulo, São Carlos/SP, 1996.

LEMES, I. J. L., SILVA, A. R. D., SILVEIRA, R. A. M., ROCHA, P. A. S. Estudo numérico comparativo de metodologias para a degradação da rigidez à flexão no contexto do método da rótula plástica refinado. **Anais do XXXVII CILAMCE Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering**, publicado em RIPE - Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia, v. 2, p. 284-298, 2016. ISSN: 2447-6102.

LI, G. Q.; LI, J. J. **Advanced analysis and design.** John Wiley e Sons. 2007, 368 p. ISBN: 9780470030615.

MONFORTON, G. R.; WU, T. S. Matrix analysis of semi-rigidly connected steel frames. **ASCE J. Structural Engineering**, v. 89, n. 6, p. 13-42, 1963. ISSN: 07339445.

MORRIS, G.; PACKER, J. A. Beam to columns connections in steel frames. **Canadian J. of Civil Eng**., v. 14, p. 68-76, 1987. ISSN: 03151468.

SANTOS, M. N; ROCHA, P. A. S.; SILVEIRA, R. A. M. Análise numérica de problemas clássicos de estabilidade através do elemento finito híbrido. Anais do **XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, Porto/Portugal, 2007. ISSN: (inexistente).

SEKULOVIC, M.; SALATIC R. Nonlinear analysis of frames with flexible connections. **Computer and Structures,** v. 79, p. 1097-1107, 2001. ISSN: 0045-7949.

SILVA, A. R. D. **Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas.** 2009. 322 p. Tese (Doutorado em Construção Metálica, PROPEC), DECiv. EM-Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto/MG, 2009.

YAU, C. Y.; CHAN, S. L. Inelastic and stability analysis of flexibly connected steel frames by springs-in-series model. **ASCE J. Structural Engineering**, v. 120, n. 10, p. 2803-2819, 1994. ISSN: 07339445.