

UMA FORMULAÇÃO REGULARIZADA PARA O ACOPLAMENTO MEC/MEF NA ANÁLISE DE DOMÍNIOS ENRIJECIDOS

Edson Denner Leonel¹ & Wilson Sergio Venturini²

Resumo

Este trabalho apresenta uma formulação para a análise de domínios enrijecidos usando o acoplamento entre os métodos de elementos de contorno (MEC) e de elementos finitos (MEF). O acoplamento do MEC a outros métodos numéricos sempre foi atrativo, uma vez que permite empregar o método numérico mais conveniente na representação das sub-estruturas onde este apresenta melhor eficiência. Neste trabalho, o comportamento estrutural do domínio em análise será descrito pelas equações do MEC, enquanto nos enrijecedores esse comportamento será descrito pelas equações do MEF. A formulação proposta emprega um procedimento de regularização por mínimos quadrados no conjunto final de equações. Tal procedimento é necessário devido à adoção de diferentes graus de aproximação para deslocamentos e forças de superfície nos enrijecedores. Dessa forma, são geradas mais equações que o número de incógnitas da análise. Serão apresentados exemplos onde os resultados obtidos pela formulação proposta são comparados aos resultados fornecidos pelo programa ANSYS.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno. Método dos Elementos Finitos. Acoplamento MEC/MEF.

A REGULARIZED FORMULATION FOR BEM/FEM COUPLING TO ANALYSIS OF REINFORCED DOMAINS

Abstract

This work presents a formulation for analysis of reinforced domains using the coupling between boundary element method (BEM) and finite element method (FEM). To couple BEM to other numerical methods was always attractive because it allows to use the more convenient numerical method in the analysis of sub-structures where it presents better efficiency. In this work, the structural behavior of the domain will be described by BEM equations while in the reinforcements this behavior will be described using FEM equations. The proposed formulation applies a regularization procedure, using least square process, on the final system of equations. This procedure was adopted due the choice of different approximations for displacements and tractions on the reinforcements. This choice produces more equations than variables in the final system of equations. Structures were analyzed and the results of the proposed scheme were compared with the results achieved using models constructed using ANSYS program.

Keywords: Boundary Element Method. Finite Element Method. Coupling BEM/FEM.

1 INTRODUÇÃO

O acoplamento entre diferentes métodos numéricos é um tema que vem sendo largamente discutido nas últimas décadas pela comunidade científica. A combinação entre os diversos métodos numéricos é um assunto de grande interesse, pois possibilita empregar o método numérico mais

¹ Doutor em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, edleonel@sc.usp.br

² Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, venturin@sc.usp.br

conveniente na representação das sub-estruturas onde estes apresentam maior eficiência, aproveitando melhor assim as particularidades de cada um.

No tocante a análises via método dos elementos de contorno (MEC), este vem sendo correntemente acoplado ao método dos elementos finitos (MEF) possibilitando assim a abordagem de diversos problemas. Nesse campo de pesquisa podem ser destacados os esforços de Brebbia & Georgio (1980), os quais analisaram problemas bidimensionais através da combinação MEC/MEF. Os autores combinaram elementos de contorno constantes com elementos finitos quadráticos e, apesar dos diferentes graus de aproximação utilizados, foram obtidos bons resultados. Mustoe & Volait (1980) também estudaram a combinação MEC/MEF para analisar a interação túnel-suporte considerando os efeitos da descontinuidade entre rocha e concreto. Problemas envolvendo escavações reforçadas são também tratados em Stamos & Beskos (1995) enquanto aplicações em problemas planos podem ser encontradas em Vallabhan & Sivakumar (1986) e em Pavlatos & Beskos (1994) sendo que nesse último trabalho os autores desenvolvem um esquema de acoplamento no domínio do tempo para a análise dinâmica de estruturas elastoplásticas.

Coda (2001) apresenta uma análise do comportamento não-linear dinâmico e estático de meios reforçados através de uma abordagem do acoplamento MEC/MEF onde o MEF é utilizado para representar os reforços no meio discretizado pelo MEC. Mesquita & Coda (2007) apresentam uma formulação, utilizando este tipo de acoplamento, para a abordagem de problemas viscoelásticos. Botta (2003) desenvolveu o acoplamento MEC/MEF em chapas, estudando problemas de contato, na interface entre o domínio e o enrijecedor e ainda para minimizar perturbações indesejáveis nos resultados nesta interface, é aplicada a técnica de suavização do contorno com mínimos quadrados. Problemas envolvendo mecânica da fratura são tratados em Aour et al. (2007). Nesse trabalho o acoplamento MEC/MEF é desenvolvido de tal forma que nas faces da fissura são empregados elementos de contorno enquanto no restante do corpo analisado são utilizados elementos finitos. Os autores obtiveram bons resultados na obtenção dos fatores de intensidade de tensão.

A formulação que será apresentada nesse trabalho trata do acoplamento MEC/MEF para a análise de domínios enrijecidos. Nessa formulação, as equações algébricas do MEC representarão o comportamento estrutural do domínio plano em análise, enquanto as equações do MEF serão utilizadas para a descrição do comportamento estrutural dos enrijecedores. O elemento finito adotado apresenta diferentes aproximações para os deslocamentos e para as forças de superfície. Os deslocamentos são aproximados por meio de um polinômio cúbico enquanto as forças de superfície são aproximadas por um polinômio do primeiro grau. Esse procedimento faz com que sejam geradas mais equações que o número de incógnitas do problema. Assim, torna-se necessário a utilização de um processo de regularização para permitir que o sistema final de equações seja solúvel.

O procedimento de regularização é empregado com o objetivo de se obter respostas suaves e estáveis para as forças de superfície na interface entre os enrijecedores e o meio. Como observado em Leite et. al. (2003), os resultados para essa grandeza são instáveis quando se utiliza a mesma aproximação para os deslocamentos e para as forças de superfície. Embora o equilíbrio seja mantido, a distribuição das forças de superfície não corresponde à configuração do carregamento atuante.

Serão apresentados dois exemplos onde os resultados obtidos pela formulação proposta são comparados às respostas fornecidas por modelos construídos no programa ANSYS o qual efetua a análise de estruturas utilizando somente as equações do MEF.

2 EQUAÇÕES DO ELEMENTO FINITO DE FIBRA

Neste trabalho serão consideradas fibras retilíneas mergulhadas em qualquer direção dentro do domínio bidimensional. As extremidades das fibras podem chegar ao contorno e valores de força ou deslocamento podem ser prescritos diretamente no elemento da fibra. As fibras serão modeladas

com elementos finitos de fibra de geometria linear com dois graus de liberdade de por nó, paralelo e normal ao eixo da barra.

Para uma força \bar{f} , aplicada longitudinalmente distribuída ao longo da fibra, a equação diferencial de equilíbrio para um ponto x qualquer do domínio da barra é:

$$\frac{d^2(u(x))}{dx^2} + \frac{1}{2GS(1+\nu)} \bar{f}(x) = 0 \quad (1)$$

sendo: $u(x)$ o deslocamento longitudinal do ponto x , G o módulo de elasticidade transversal do material da fibra, ν o coeficiente de Poisson e S a área da seção transversal da fibra.

Parece bastante razoável a adoção de polinômios com diferentes graus para as aproximações dos deslocamentos, $u(x)$, e das forças, \bar{f} , por elemento finito. Para o elemento de fibra, adota-se um polinômio cúbico para aproximar os deslocamentos e um linear para as forças. Assim, a derivada segunda do deslocamento aproximado tem o mesmo grau polinomial que a força aproximada, conforme a equação diferencial de equilíbrio, Eq. (1). Definem-se, por elemento finito, quatro variáveis nodais de deslocamento e duas de força, conforme apresenta a Figura 1.

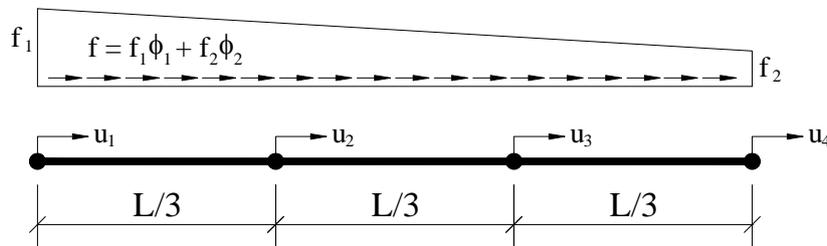


Figura 1 – Variáveis nodais do elemento finito de fibra.

Conforme a Figura 1, os quatro nós com as variáveis de deslocamento estão definidos nas duas extremidades do elemento e nos terços do elemento. Os nós com as variáveis de força são os dois de extremidade da fibra. As equações algébricas de equilíbrio do elemento da Figura 1 são obtidas utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais, expresso pela seguinte equação:

$$\sum_{\Omega_E=1}^{NF} \left(\int_{\Omega_E} [\sigma(u^E) \delta \varepsilon(\delta u^E)] d\Omega_E - \int_{\Omega_E} (f^E \delta u^E) d\Omega_E - F^i \delta u^{E_i} \right) = 0 \quad (2)$$

onde: $\sigma(u^E)$ é a tensão normal na fibra, $\varepsilon(u^E)$ a deformação longitudinal na fibra, u^E o deslocamento nodal, f^E a força nodal, F^i as forças concentrada no nó i , Ω_E o domínio do elemento finito, δ as variação das grandezas e NF o número total de fibras da malha.

Da Eq. (2) resulta o sistema de equações do elemento finito:

$$[K^E] \{u^E\} = [G^E] \{f^E\} + \{F^E\} \quad (3)$$

em que: K^E é a matriz de rigidez do elemento finito, G^E a lumping matrix, u^E o vetor com os deslocamentos nodais, f^E o vetor com as forças de superfície e F^E o vetor com as forças concentradas nos nós.

A matriz G^E , função das características geométricas do elemento, é dada pelo produto das funções polinomiais linear e cúbica da segunda integral da Eq. (2). Para os nós posicionados da forma como apresentado na Figura 1, o sistema matricial da Eq. (3) pode ser explicitado da seguinte forma:

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 3.7 & -4.725 & 1.35 & -0.325 \\ -4.725 & 10.8 & -7.425 & 1.35 \\ 1.35 & -7.425 & 10.8 & -4.725 \\ -0.325 & 1.35 & -4.725 & 3.7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^E \\ u_2^E \\ u_3^E \\ u_4^E \end{Bmatrix} = L \begin{bmatrix} 13/120 & 1/60 \\ 3/10 & 3/40 \\ 3/40 & 3/10 \\ 1/60 & 13/120 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1^E \\ f_2^E \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^E \\ F_2^E \\ F_3^E \\ F_4^E \end{Bmatrix} \quad (4)$$

sendo: E o módulo de elasticidade longitudinal e L o comprimento do elemento finito.

3 FORMULAÇÃO DO ACOPLAMENTO DAS FIBRAS COM O DOMÍNIO BIDIMENSIONAL VIA COMBINAÇÃO MEC/MEF

3.1 Equações do acoplamento

Para considerar o domínio bidimensional enrijecido com fibras, estas modeladas com elementos finitos e o primeiro com elementos de contorno, propõe-se uma formulação combinando as equações dos dois métodos considerando a aderência perfeita entre os dois meios. O acoplamento entre os materiais é garantido por meio da imposição do equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos. Assim:

$$f^D = -f^E \quad (5)$$

$$u^D = u^E \quad (6)$$

onde: f^D, f^E são as forças do domínio do corpo e na fibra respectivamente e u^D, u^E os deslocamentos nos pontos nodais no domínio e na fibra respectivamente.

O termo f^E corresponde à força distribuída que a fibra aplica ao corpo a qual, por equilíbrio, é igual e de sinal oposto a força que atua na própria fibra. Os deslocamentos na interface devem ser iguais por compatibilidade. Para o problema discretizado, as Eq. (5) e Eq. (6) são equivalentes a:

$$\{f^D\} = -\{f^E\} = \{f\} \quad (7)$$

$$\{u^D\} = \{u^E\} = \{u\} \quad (8)$$

O equilíbrio e a compatibilidade são por nó de interface. Para o problema tratado, ou seja, domínio plano com fibras retilíneas, a reação das fibras sobre o domínio equivale a uma linha de carga aplicada ao domínio do corpo. Esta linha de carga, por equilíbrio com a força admitida linear no elemento finito, tem a forma de uma seqüência de trechos lineares ligando nós consecutivos conforme mostra a Figura 2. Nessa figura, os elementos são contínuos, ou seja, para n elementos finitos de uma barra tem-se $(n+1)$ nós e variáveis de força. A força incógnita, aplicada ao domínio como uma linha de carga, precisa ser levada em conta nas equações do MEC.

A linha de carga aparece nas equações como se fosse uma força de massa aplicada numa área que tende à zero, ou a uma reta nos casos planos. Assim, o termo de domínio da identidade Somigliana pode ser reescrito como:

$$\int_{\Omega} b_j(c) u_{ij}^*(f, c) d\Omega = \int_{\Omega_E} f_j^D(c) u_{ij}^*(f, c) d\Omega_E \quad (9)$$

em que: f_j^D é a reação da fibra sobre o domínio segundo a direção j do sistema cartesiano.

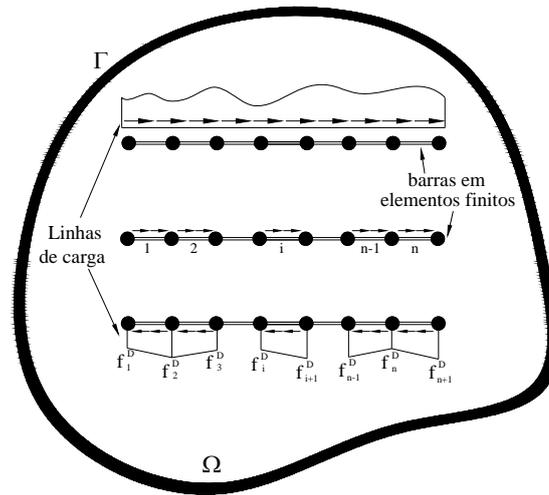


Figura 2 – Linhas de carga aplicadas ao domínio.

A Eq. (9) fica melhor escrita se ao invés de f^D , for decomposta a solução fundamental u_{ij}^* . Dessa forma:

$$\int_{\Omega_E} f_j^D(c) u_{ij}^*(f, c) d\Omega_E = \int_{\Omega_E} f^D(c) u_{ij}^{*D}(f, c) d\Omega_E = \int_{\Omega_E} f^D(c) u_{ij}^*(f, c) \eta_j^* d\Omega_E \quad (10)$$

Na Eq. (10), o termo η_j^* indica os cossenos diretores da linha de carga em relação ao sistema de coordenadas cartesianas. A última integral da Eq. (10) pode ser transformada em uma somatória:

$$\sum_{fb=1}^{ND} \int_{\Omega_E} f^D(c) u_{ij}^*(f, c) \eta_j^* d\Omega_E = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) u_{ij}^*(f, c) \eta_j^* d\Omega_{E_k} \quad (11)$$

Nessa notação ND representa o número total de fibras do domínio e NEF o número total de elementos finitos contidos em cada fibra. Sendo a força aproximada linearmente sobre as linhas de carga, a Eq. (11) pode ser reescrita como:

$$\sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) u_{ij}^*(f, c) \eta_j^* d\Omega_{E_k} = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) u_{ij}^*(f, c) \eta_j^*) f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (12)$$

sendo: φ a função de aproximação do carregamento e f_n^D os valores nodais do carregamento atuante sobre as fibras.

As integrais apresentadas na Eq. (12) podem ser avaliadas numericamente empregando-se quadratura de Gauss-Legendre. Para melhoria de precisão pode ser utilizado o procedimento de sub-elementação, o qual foi utilizado neste trabalho. Caso o ponto fonte pertença à linha de carga recomenda-se calcular essa integral empregando-se recursos analíticos, tal como feito nesse trabalho. Dessa forma, a expressão para a determinação das grandezas no contorno é a apresentada na Eq. (13).

$$[H_{bb}]\{U_b\} = [G_{bb}]\{P_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \quad (13)$$

Sendo as matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$ iguais às matrizes $[H]$ e $[G]$ clássicas do MEC, decorrentes da integração das soluções fundamentais de deslocamento e força de superfície sobre o contorno. O sub-índice b indica contorno. A matriz $[G_{bE}]$ contém os coeficientes de integração da Eq. (12).

Para completar as equações necessárias ao acoplamento e a conseqüente determinação dos parâmetros do contorno, falta montar as equações algébricas dos deslocamentos dos pontos internos.

Deve-se escrever uma equação para cada deslocamento do meio contínuo, nos pontos coincidentes com os nós de deslocamento dos elementos finitos, para que a Eq. (8) seja obedecida. Assim:

$$u^D = u_i(f)\eta_i^* = \int_{\Gamma} P_j(c)u_{ij}^*(f,c)\eta_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(c)P_{ij}^*(f,c)\eta_i^* d\Gamma + \int_{\Omega_E} f^E(c)u_{ij}^*(f,c)\eta_j^*\eta_i^* d\Omega_E \tag{14}$$

Ou seja, a Eq. (14) é a equação integral dos deslocamentos dos pontos internos do sólido, na direção do eixo da fibra, que é a direção do grau de liberdade em deslocamento do elemento de barra, Figura 1. A Eq. (14) vale somente para pontos fontes, “f”, internos. A equação algébrica que resulta da Eq. (14), aplicada a todos os nós internos, pode ser escrita como:

$$[H_{Eb}]\{U_b\} + \{U_E\} = [G_{Eb}]\{P_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \tag{15}$$

Sendo $[H_{Eb}]$, $[G_{Eb}]$ e $[G_{EE}]$ matrizes de influência das integrações dos pontos internos.

Na Figura 3, tem-se a representação de uma barra, discretizada em n elementos finitos, e da linha de carga de domínio, superposta à barra. Os nós de deslocamento, definidos geometricamente para cada elemento finito, segundo a Figura 1, estão representados por quadrados na Figura 3. As cruzes representam os pontos fontes, “f”, da Eq. (14) dos deslocamentos internos. Observa-se que, nas extremidades da fibra, para os primeiro e último nós, as equações do MEC não são escritas na posição dos nós, mas para posições deslocadas, internas à linha de carga. Para os demais nós, internos à linha de carga, os pontos fonte da equação do MEC coincidem com os nós de deslocamento dos elementos finitos.

O esquema da Figura 3 estende-se, nesta formulação, para todas as fibras do domínio. Este esquema facilita a integração analítica sobre o primeiro e último elementos da linha de carga da integral da Eq.(12), para a equação dos pontos deslocados de extremidade. Outra vantagem é permitir que as extremidades das fibras possam chegar ao contorno do corpo sem que a equação do MEC necessite ser escrita para pontos do contorno.

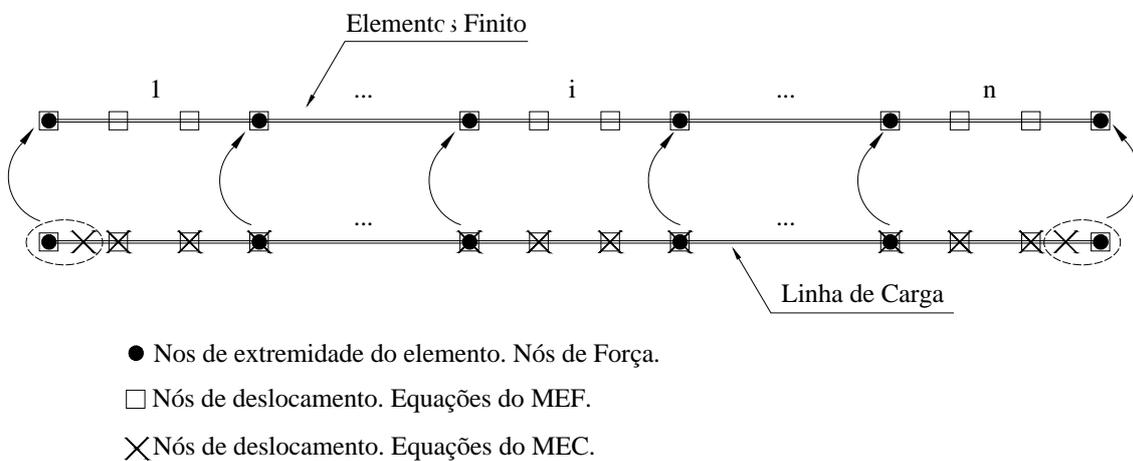


Figura 3 – Nós internos para a equação dos deslocamentos do MEC.

Com as posições dos nós definidas na Figura 3, a equação de compatibilidade de deslocamentos deve ser reescrita como:

$$\{u^D\} = [T]\{u^E\} = [T]\{u\} \tag{16}$$

Sendo $[T]$ a matriz que relaciona a posição dos nós de $\{u^D\}$ com os nós de $\{u^E\}$. Por exemplo, da Figura 3, para os dois pontos fonte deslocados das extremidades da fibra, supondo-os distantes de

cada extremidade de $L/6$ do comprimento do primeiro ou do último elemento que contém os pontos fonte, tem-se:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.9375 & -0.3125 & 0.0625 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M & M & M & M & M & M & M & M & M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0.0625 & -0.3125 & 0.9375 & 0.3125 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Ou seja, com exceção da primeira e da última linha, a matriz é igual à identidade. Dessa forma, o conjunto de equações para a determinação dos parâmetros do acoplamento MEC/MEF e os valores de contorno podem ser resumidos como na Eq. (18).

$$\begin{aligned} [H_{bb}]\{U_b\} &= [G_{bb}]\{P_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \\ [H_{Eb}]\{U_b\} + [T]\{U_E\} &= [G_{Eb}]\{P_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \\ [K^E]\{U^E\} &= -[G^E]\{f^D\} + \{F^E\} \\ &\Downarrow \\ [A_{bb}]\{X\} &= [B_{bb}]\{F_b\} + [G_{bE}]\{f^D\} \\ [A_{Eb}]\{X\} + [T]\{U_E\} &= [B_{Eb}]\{F_b\} + [G_{EE}]\{f^D\} \\ [K^E]\{U^E\} &= -[G^E]\{f^D\} + \{F^E\} \end{aligned} \quad (18)$$

Sendo que $[A_{bb}]$ e $[B_{bb}]$ resultam da troca de colunas entre as matrizes $[H_{bb}]$ e $[G_{bb}]$. Já $[A_{Eb}]$ e $[B_{Eb}]$ decorre da troca de colunas entre as matrizes $[H_{Eb}]$ e $[G_{Eb}]$. Enquanto $\{F_b\}$ são os valores prescritos de força de superfície e deslocamentos no contorno e $\{X\}$ são as grandezas incógnitas no contorno.

Resta ainda uma última equação a ser apresentada a qual refere-se à determinação das tensões nos pontos internos ao contorno. Nesse caso, a exemplo da identidade Somigliana, as forças de domínio são levadas em conta através da integral:

$$\int_{\Omega} b_j(c) D_{ijk}(f, c) d\Omega = \int_{\Omega_E} f_j^D(c) D_{ijk}(f, c) d\Omega_E \quad (19)$$

O termo D_{ijk} é obtido a partir da derivação da solução fundamental de deslocamento. E a exemplo da Eq. (12) tem-se:

$$\sum_{j_b=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) D_{ijk}(f, c) \eta_k d\Omega_{E_k} = \sum_{j_b=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) D_{ijk}^*(f, c) \eta_k) f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (20)$$

Assim, a equação para a determinação das tensões internas, de forma semelhante a equação apresentada para a obtenção dos deslocamentos nos pontos internos, pode ser matricialmente expressa como:

$$[H_{Ib}^-]\{U_b\} + \{\sigma\} = [G_{Ib}^-]\{P_b\} + [G_{IE}^-]\{f^D\} \quad (21)$$

Onde o sub-índice I indica ponto interno. As matrizes $\left[H_{Ib}^- \right]$ e $\left[G_{Ib}^- \right]$ são as matrizes de influência das integrações dos pontos internos sobre os elementos no contorno. A matriz $\left[G_{IE}^- \right]$ é obtida como resultado da solução da Eq. (20).

A formulação pode ser estendida para o caso em que os elementos finitos de fibra possuem dois graus de liberdade (x e y) e não apenas um grau de liberdade, paralelo ao comprimento da fibra. Esse procedimento foi efetuado neste trabalho e permite a análise de reforços que formam uma configuração de treliça no interior do domínio. A consideração desse tipo de configuração nos enrijecedores é de grande importância, pois permite a análise de estruturas mais complexas e ao mesmo tempo contribui para as formulações do MEC uma vez que acoplamentos MEC/MEF que consideram esse tipo de interação entre enrijecedores não são encontrados na literatura. Para tanto as Eq.(4), Eq. (12), Eq. (14), Eq. (17) e Eq. (20) devem ser reescritas.

Para a Eq. (4) a matriz de rigidez deve ser expandida de forma a contemplar também os deslocamentos na direção normal ao corpo da fibra. O mesmo aplica-se a “lumping matrix”, a qual deve também abranger as forças na direção normal ao eixo do elemento de fibra. Assim a matriz de rigidez pode ser reescrita como:

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 3,7C^2 & 3,7CS & -4,725C^2 & -4,725CS & 1,35C^2 & 1,35CS & -0,325C^2 & -0,325CS \\ 3,7CS & 3,7S^2 & -4,725CS & -4,725S^2 & 1,35CS & 1,35S^2 & -0,325CS & -0,325S^2 \\ -4,725C^2 & -4,725CS & 10,8C^2 & 10,8CS & -7,425C^2 & -7,425CS & 1,35C^2 & 1,35CS \\ -4,725CS & -4,725S^2 & 10,8CS & 10,8S^2 & -7,425CS & -7,425S^2 & 1,35CS & 1,35S^2 \\ 1,35C^2 & 1,35CS & -7,425C^2 & -7,425CS & 10,8C^2 & 10,8CS & -4,725C^2 & -4,725CS \\ 1,35CS & 1,35S^2 & -7,425CS & -7,425S^2 & 10,8CS & 10,8S^2 & -4,725CS & -4,725S^2 \\ -0,325C^2 & -0,325CS & 1,35C^2 & 1,35CS & -4,725C^2 & -4,725CS & 3,7C^2 & 3,7CS \\ -0,325CS & -0,325S^2 & 1,35CS & 1,35S^2 & -4,725CS & -4,725S^2 & 3,7CS & 3,7C^2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

em que: C é o cosseno do ângulo de inclinação do elemento finito e S o seno do ângulo de inclinação do elemento finito.

A “lumping matrix” expandida pode ser reescrita como:

$$L \begin{bmatrix} 13/120 & 0 & 1/60 & 0 \\ 0 & 13/120 & 0 & 1/60 \\ 3/10 & 0 & 3/40 & 0 \\ 0 & 3/10 & 0 & 3/40 \\ 3/40 & 0 & 3/10 & 0 \\ 0 & 3/40 & 0 & 3/10 \\ 1/60 & 0 & 13/120 & 0 \\ 0 & 1/60 & 0 & 13/120 \end{bmatrix} \quad (23)$$

A equação dos deslocamentos nos pontos internos, determinada pelo MEC, deve também conter os deslocamentos no plano da estrutura. Assim, a Eq. (14) deve ser reescrita como:

$$u^D = u_i(f) = \int_{\Gamma} P_j(c) u_{ij}^*(f, c) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(c) P_{ij}^*(f, c) d\Gamma + \int_{\Omega_E} f^E(c) u_{ij}^*(f, c) d\Omega_E \quad (24)$$

Já a Eq. (12) deve ser reescrita de forma a considerar as duas forças atuantes em cada nó do elemento finito. Dessa forma a Eq. (12), para esse caso, passa a ser:

$$\sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) u_{ij}^*(f, c) d\Omega_{E_k} = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) u_{ij}^*(f, c)) f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (25)$$

Para a determinação das tensões nos pontos internos a Eq. (20) deve ser reescrita como:

$$\sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} f^D(c) D_{ijk}(f, c) d\Omega_{E_k} = \sum_{fb=1}^{ND} \sum_{k=1}^{NEF} \int_{\Omega_{E_k}} (\varphi(c) D_{ijk}^*(f, c)) f_n^D(c) d\Omega_{E_k} \quad (26)$$

Para a Eq. (17) os valores nodais devem interpolados tanto na direção x quanto na direção y. Assim quando o nó em consideração não é descontínuo atribui-se valor unitário a diagonal correspondente. Caso contrário os valores não nulos apresentados na Eq. (17) devem ser aplicados tanto para o deslocamento x quanto para o deslocamento y.

3.2 Combinação das equações MEC/MEF com regularização por mínimos quadrados

Observando-se os vetores com as variáveis nodais de deslocamento e forças de superfície internos, e das definições para as aproximações desses campos sobre os elementos finitos, constata-se que existem mais variáveis em deslocamento do que em forças de superfície. O número de variáveis de deslocamentos internos é igual a duas vezes o número total de nós do elemento finito, enquanto para as forças de superfície, o número de variáveis é igual a duas vezes o número de nós de extremidade do elemento finito.

Segundo a Eq. (18), pode-se verificar que as variáveis do problema são $\{U_b\}, \{P_b\}, \{U_E\}$ e $\{f^D\}$.

No entanto, o conjunto citado tem mais equações que o número de incógnitas. A causa é simples, vem da adoção de diferentes graus para os polinômios aproximadores das forças e deslocamentos internos. Para que o problema tenha solução utiliza-se um procedimento simples baseado na técnica dos mínimos quadrados. Como o número de equações é maior que o de incógnitas é necessário reduzi-lo a um número conveniente. A técnica dos mínimos quadrados consiste em reduzir o número de equações, tornando o sistema linear solvível, minimizando o erro da resposta quando levada ao sistema original.

Serão agora descritos os três procedimentos desenvolvidos neste trabalho para a redução das equações de forma a tornar o sistema solvível. O primeiro deles consiste na aplicação do processo de mínimos quadrados somente sobre as equações de deslocamentos nos pontos internos. Já no segundo, o processo de mínimos quadrados é aplicado somente sobre as equações provenientes do MEF enquanto que o terceiro trata da aplicação de mínimos quadrados sobre o conjunto final de equações resultante do acoplamento.

Primeiramente será descrito o processo de regularização utilizando as equações de deslocamento nos pontos internos. O processo de mínimos quadrados aplicado nesse conjunto de equações consiste na pré-multiplicação de todos os termos dessa equação por uma matriz $[G_{EE}^*]$.

Assim:

$$[G_{EE}^*][A_{Eb}]\{X\} + [G_{EE}^*][T]\{U_E\} = [G_{EE}^*][B_{Eb}]\{F_b\} + [G_{EE}^*][G_{EE}]\{f^D\} \quad (27)$$

A matriz $[G_{EE}^*]$ pode apresentar duas configurações diferentes para a regularização. Na primeira delas $[G_{EE}^*]$ é tomada igual à transposta da matriz $[G_{EE}]$. Nesse caso a regularização é global já que envolve a influência de cada elemento de fibra sobre os demais. Na segunda configuração, $[G_{EE}^*]$ é igual à transposta de $[G_{EE}]_{ii}$, sendo que essa última matriz contém apenas a influência de cada elemento sobre si próprio. Nesse caso aplica-se a regularização para cada conjunto de equações de cada barra.

Uma segunda alternativa, para a realização do processo de regularização, é a que emprega as equações provenientes do MEF. Nesse caso o processo de mínimos quadrados se faz pré-multiplicando todas as equações fornecidas pelo MEF pela transposta da "lumping matrix", $[G^E]$.

Dessa forma:

$$[G^E]^T [K^E] \{U^E\} = -[G^E]^T [G^E] \{f^D\} + [G^E]^T \{F^E\} \quad (28)$$

Existe também a possibilidade da realização do processo de mínimos quadrados sobre o conjunto final de equações. Para tal deve-se reescrever a Eq. (18) de uma forma mais conveniente:

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & 0 & -[G_{bE}] \\ [A_{Eb}] & [T] & -[G_{EE}] \\ 0 & [K^E] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{U_E\} \\ \{f^D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_{bb}] \\ [B_{Eb}] \\ 0 \end{bmatrix} \{F_b\} \quad (29)$$

A regularização é efetuada pré-multiplicando todo o sistema apresentado na Eq. (29) pela transposta da matriz que multiplica as incógnitas. Assim:

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [A_{Eb}] & 0 \\ 0 & [T] & [K^E] \\ -[G_{bE}] & -[G_{EE}] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [A_{bb}] & 0 & -[G_{bE}] \\ [A_{Eb}] & [T] & -[G_{EE}] \\ 0 & [K^E] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X\} \\ \{U_E\} \\ \{f^D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{bb}] & [A_{Eb}] & 0 \\ 0 & [T] & [K^E] \\ -[G_{bE}] & -[G_{EE}] & [G^E] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{bb}] \\ [B_{Eb}] \\ 0 \end{bmatrix} \{F_b\} \quad (30)$$

Esse procedimento é mais custoso do ponto de vista computacional uma vez que necessita da transposição de uma matriz de grandes dimensões ao passo que nos outros dois casos anteriores apenas uma parte do sistema final é alterado.

4 APLICAÇÕES

4.1 Exemplo 1. Chapa com enrijecedores longitudinais

A estrutura a ser considerada nesse item é a apresentada na Figura 4. Trata-se de uma estrutura plana com três metros de comprimento e um metro de altura contendo quatro fibras uniformemente distribuídas em seu interior. Esta estrutura é engastada na sua extremidade esquerda sendo prescrito um deslocamento igual a 0,1 m na extremidade oposta, na direção de sua maior dimensão. Foram consideradas para o domínio as seguintes propriedades: $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,20$. Já para as fibras foram adotados $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$ e $S = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

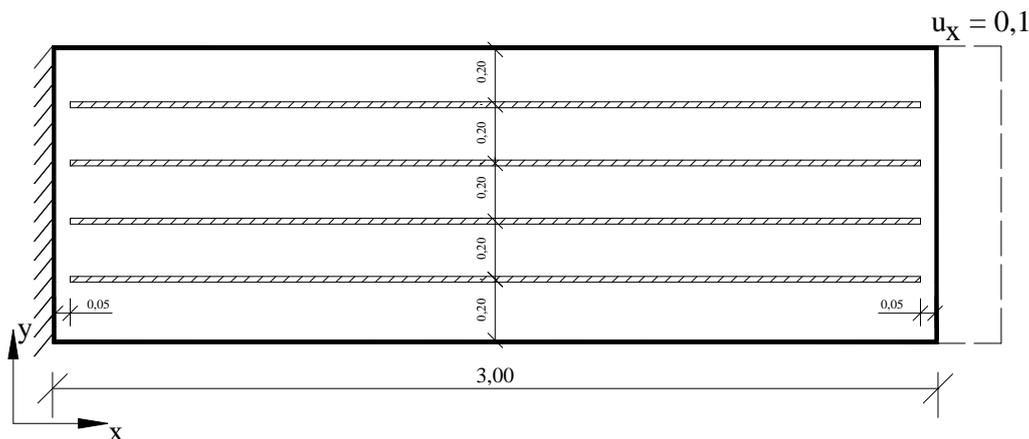


Figura 4 – Estrutura analisada. Dimensões em m.

Foram utilizados 160 elementos para a discretização do contorno enquanto em cada fibra são distribuídos 116 elementos finitos. A regularização é executada fazendo-se o processo de mínimos quadrados nas equações de deslocamentos nos pontos internos.

Os resultados obtidos nesse exemplo são comparados a um modelo equivalente construído no software ANSYS o qual analisa estruturas empregando as equações do MEF. No modelo construído no ANSYS foi utilizada uma malha uniforme e regular com 1200 elementos planos para o domínio enquanto cada fibra foi discretizada em 58 elementos. Inicialmente são comparados os deslocamentos ao longo do comprimento da fibra. O diagrama contendo esse resultado é mostrado na Figura 5.

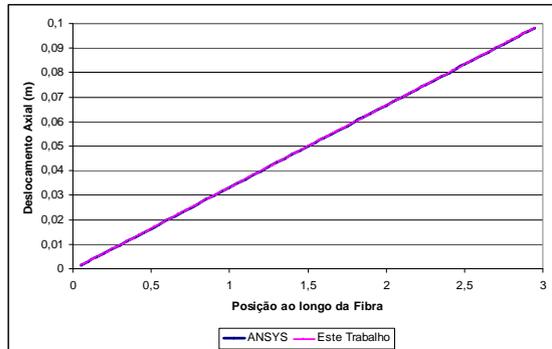


Figura 5 – Deslocamentos na direção x fibras.

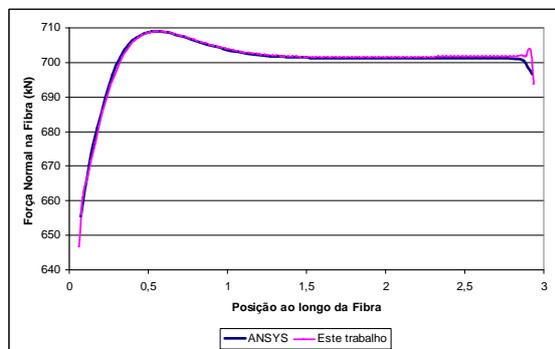


Figura 6 – Forças normais nas fibras.

Verifica-se que os resultados obtidos nas duas análises realizadas são concordantes demonstrando a eficiência da formulação desenvolvida. Na Figura 6 é ilustrado o diagrama comparativo para as forças normais nos elementos de fibra, onde pode-se também verificar a concordância dos resultados entre os dois modelos considerados. As figuras acima mostram a eficiência da formulação desenvolvida e implementada. Os resultados fornecidos pela formulação proposta e pelo software ANSYS são concordantes.

Finalmente, foram comparados os deslocamentos nas direções X e Y para os nós do contorno da estrutura. Nas Figura 7 e Figura 8 são apresentados os diagramas comparativos para essa grandeza onde os deslocamentos são apresentados em função da numeração dos nós presentes na discretização do contorno. A numeração começa no canto inferior esquerdo e, a partir da face inferior, cresce no sentido anti-horário. Como pode ser visualizado por meio dessas duas figuras verifica-se que os resultados obtidos pelos dois modelos numéricos considerados concordam entre si. Esse resultado valida o modelo de acoplamento MEC/MEF desenvolvido.

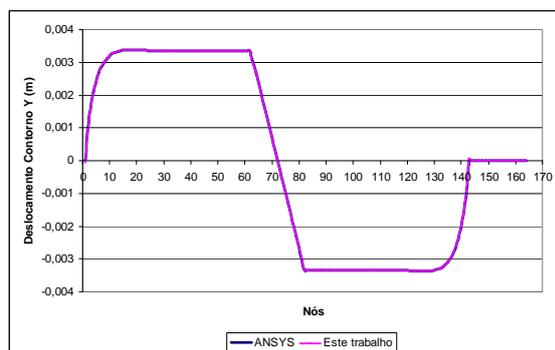
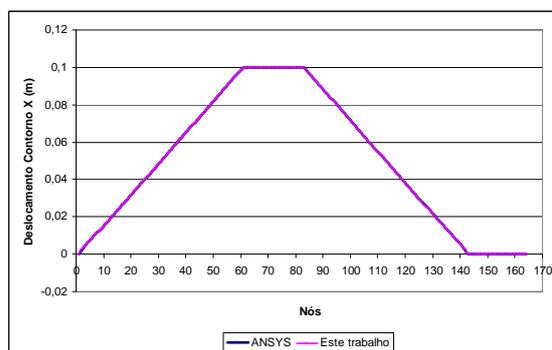


Figura 7 – Deslocamentos direção X contorno. Figura 8 – Deslocamentos direção Y contorno.

4.2 Exemplo 2. Chapa tracionada com enrijecedores longitudinais e transversais

A estrutura considerada é a apresentada na Figura 9. Esta é uma estrutura plana de três metros de comprimento por cinquenta centímetros de altura. O carregamento atuante na estrutura é

constituído por um deslocamento de 0,05 metros imposto em sua extremidade direita, enquanto na extremidade esquerda a estrutura é engastada. São distribuídas fibras no domínio da estrutura conforme indicam as linhas na cor azul, apresentadas na Figura 9. As fibras estão divididas em fibras superior, inferior e estribos as quais formam uma sistema de treliça no interior da estrutura. As propriedades dos materiais adotadas para a estrutura são as seguintes: para a matriz $E = 2,5 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,20$, para todas as fibras foi considerado $E = 2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, no entanto a área da seção transversal foi considerada diferente para cada uma delas. Para as fibras superiores tem-se $S_{\text{superiores}} = 4,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, fibras inferiores $S_{\text{inferiores}} = 9,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ e estribos $S_{\text{estribos}} = 7,85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. O contorno foi discretizado em 700 elementos enquanto nas fibras foram utilizados 250 elementos finitos. A regularização é executada fazendo-se o processo de mínimos quadrados nas equações fornecidas pelo MEF.

Inicialmente foram analisados os deslocamentos ao longo do contorno, das fibras superiores e inferiores e também no estribo central. Esses resultados foram comparados às respostas fornecidas por um modelo equivalente construído no software ANSYS. Via ANSYS foram utilizados 15000 elementos, distribuídos em uma malha regular para a discretização do domínio sendo, nas fibras, utilizados 1100 elementos.

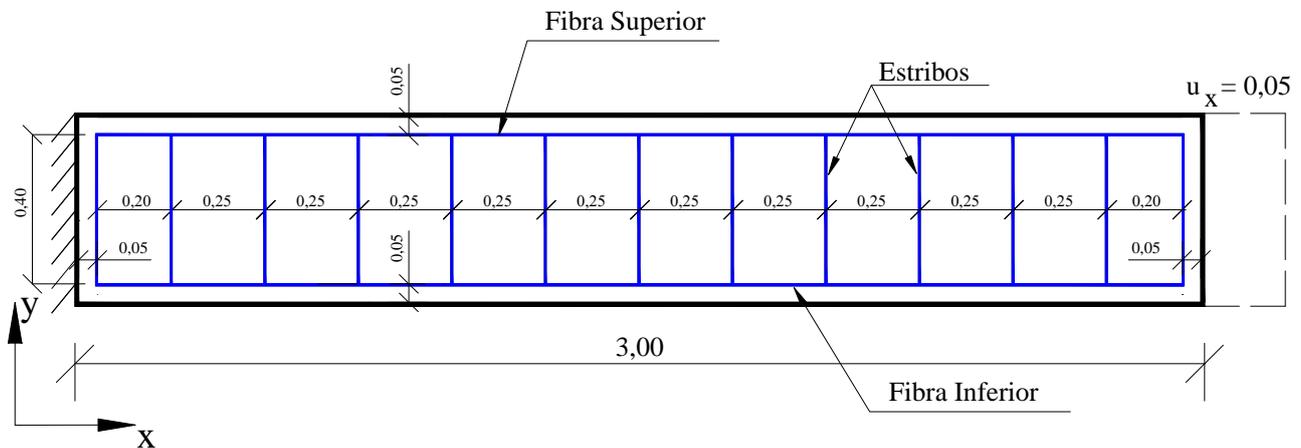


Figura 9 – Estrutura analisada, dimensões em m.

Os diagramas comparativos com as respostas estão ilustrados nas Figura 10, Figura 11, Figura 12, Figura 13 e Figura 14. Nas duas primeiras figuras os deslocamentos são mostrados em função da numeração dos nós a qual inicia-se no canto inferior esquerdo e, a partir da face inferior, cresce no sentido anti-horário.

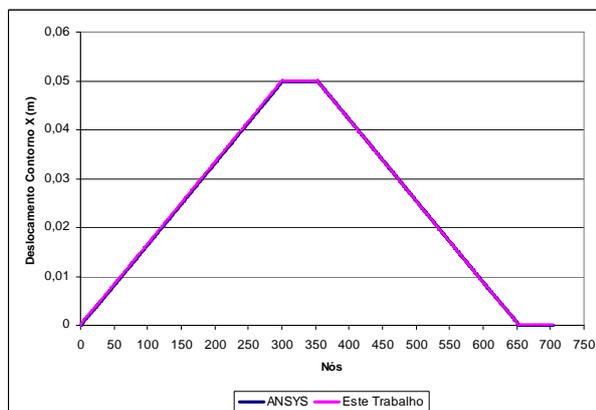


Figura 10 – Deslocamentos direção x contorno.

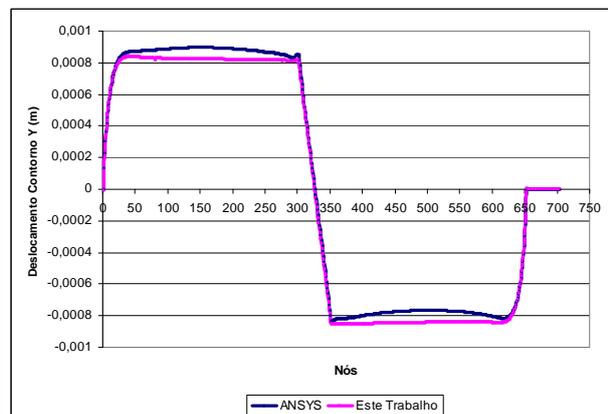


Figura 11 – Deslocamentos direção y contorno.

De acordo com os diagramas comparativos apresentados pode-se verificar que a formulação desenvolvida e implementada fornece bons resultados quando comparado aos resultados fornecidos pelo ANSYS. A formulação proposta conseguiu reproduzir os resultados previstos pelo ANSYS o que valida a implementação proposta.

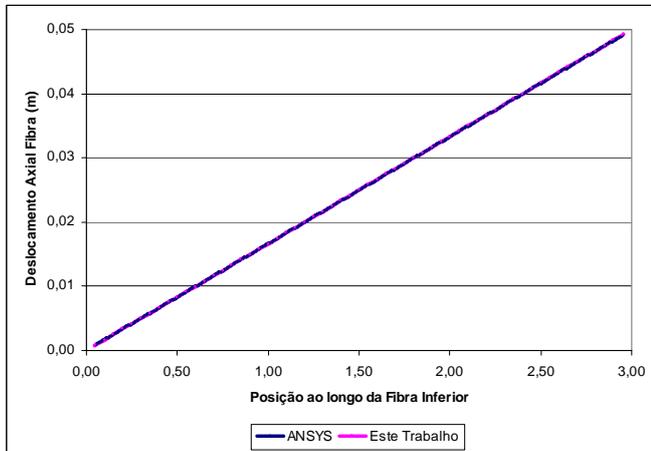


Figura 12 – Deslocamento direção x fibra inferior.

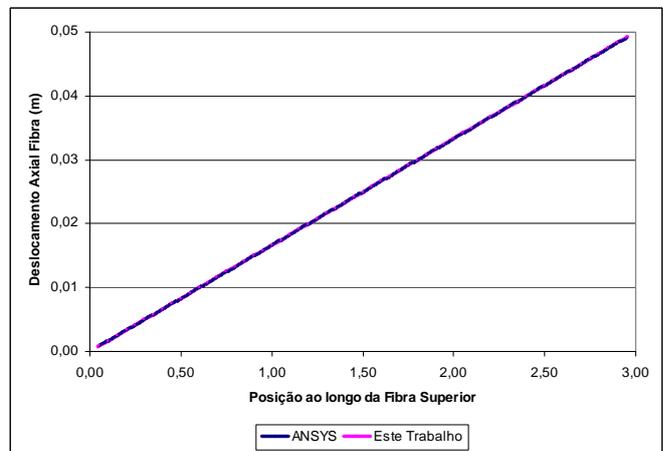


Figura 13 – Deslocamento direção x fibra superior.

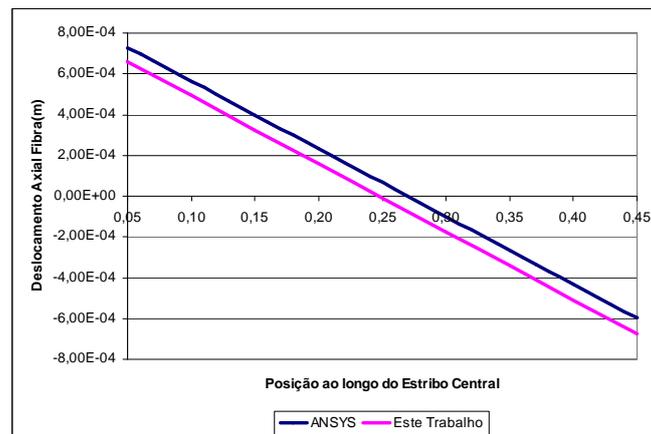


Figura 14 – Deslocamento direção y estribo central.

Com relação às forças de superfície os resultados são apresentados nas Figura 15 e Figura 16. Como mostrado nessas duas figuras, observa-se uma concentração de tensões nas extremidades das fibras. Esse comportamento já é esperado devido a diferença entre a rigidez da matriz e da fibra. Para os demais pontos ao longo da fibra, observa-se que as forças de superfície são suaves e coerentes com o carregamento atuante.

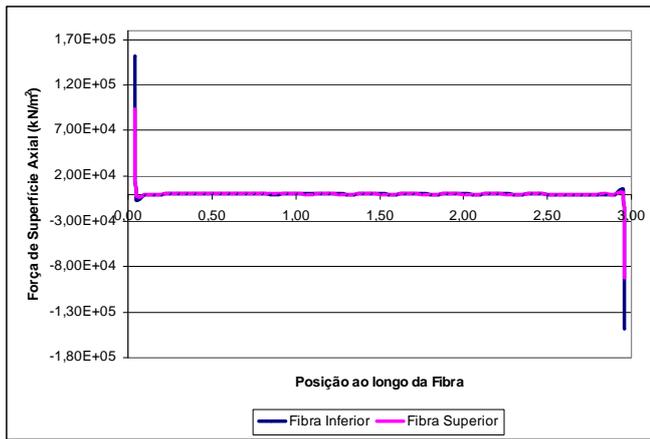


Figura 15 – F. Sup. fibras superior e inferior direção x.

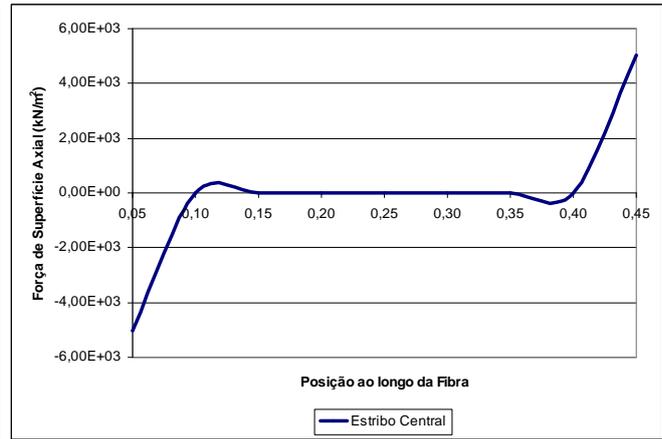


Figura 16 – F. superfície estribo central direção y.

As forças normais nas fibras foram também calculadas, sendo os diagramas comparativos, apresentados nas Figura 17 e Figura 18 para as fibras inferior e superior respectivamente. Observa-se nessas figuras, que os resultados obtidos por meio do modelo proposto concordam com os verificados no modelo construído no ANSYS. Como a malha de elementos finitos utilizada no ANSYS é muito refinada foi possível, no modelo do ANSYS, observar a concentração de tensões existente na extremidade das fibras.

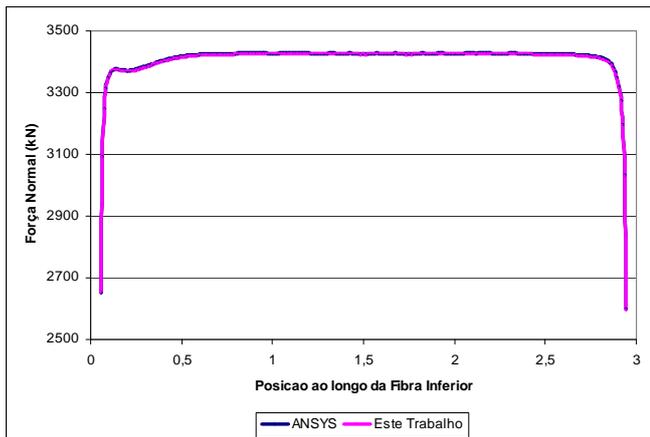


Figura 16 – Força normal fibra inferior.

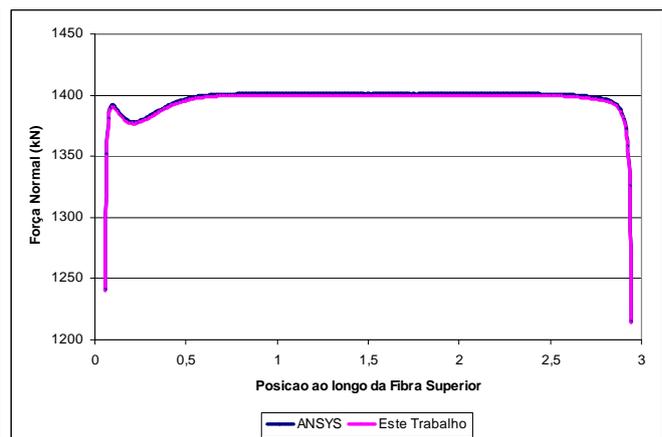


Figura 17 – Força normal fibra superior.

5 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi tratada a modelagem de estruturas planas enrijecidas por meio do acoplamento entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos. Foi apresentada uma formulação para a análise desse tipo de estrutura onde é efetuada uma regularização sobre o conjunto de equações resultante por meio da técnica de mínimos quadrados. Esse procedimento foi proposto com o objetivo de se obter respostas suaves e coerentes para as forças de superfície, o que realmente se verificou. A formulação proposta foi testada e os resultados das análises foram comparados às respostas fornecidas por modelos construídas no programa ANSYS. Os resultados são satisfatórios e confirmam a precisão da formulação apresentada. Mesmo em estruturas onde os enrijecedores apresentam uma configuração geométrica complexa no interior do sólido, como no exemplo 2, a formulação proposta conseguiu representar corretamente o comportamento estrutural.

Assim pretende-se agora incluir na formulação desenvolvida os efeitos de plastificação das fibras e também do escorregamento desta com relação ao meio.

6 AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer à FAPESP pelo apoio financeiro fornecido para a realização desta pesquisa.

7 REFERÊNCIAS

AOUR, B. ; RAHMANI, O. ; NAIT-ABDELAZIZ, M. A coupled FEM/BEM approach and its accuracy for solving crack problems in fracture mechanics. **International Journal of Solids and Structures**. v. 44, p.2523-2539, 2007.

BOTTA, A. S. **Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

BREBBIA, C. A.; GEORGIO, P. Combination of boundary and finite elements for elastostatics. **Appl. Math. Modelling**, v. 3, p. 212-220, 1980.

CODA, H. B. Dynamic and static non-linear analysis of reinforced media: a BEM/FEM coupling approach. **Computers & Structures**, v.79, p. 2751-2765, 2001.

LEITE, L. G. S.; CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 27, p. 193-201, 2003.

LEONEL, E. D. **Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A Boundary element methodology for viscoelastic analysis: Part II without cells, **Applied Mathematical Modelling**, v.31, p.1171-1185, 2007.

MUSTOE, G. G.; VOLAIT, F. A symmetric direct integral equation method for twodimensional elastostatics. In: INT. SEMINAR ON BOUNDARY ELEMENT METHODS, 2., Southampton. 1980.

PAVLATOS, G. D.; BESKOS, D. E. Dynamic elastoplastic analysis by BEM/FEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 14, n.1, p. 51-63, 1994.

STAMOS, A. A.; BESKOS, D. E. Dynamic analysis of large 3D underground structures by the BEM. **Earthquake engineering and structural dynamics**, v. 24, p. 917-934, 1995.

VALLABHAN, C. V. G.; SIVAKUMAR, J. Coupling of BEM and FEM for 3D problems in geotechnical engineering. In: BOUNDARY ELEMENT TECHNOLOGY CONFERENCE, 2., MIT, Massachusetts, USA, p.675-686, 1986.

