

ELEMENTO PARA DISCRETIZAÇÃO DE SAPATAS RÍGIDAS COM BASE NO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Marcio Antonio Ramalho¹ & Wilson Sergio Venturini²

Resumo

O presente trabalho trata do desenvolvimento de um elemento para discretização de sapatas rígidas com base no Método dos Elementos de Contorno. Esse elemento utiliza as soluções fundamentais de Mindlin ou Boussinesq-Cerruti visando uma discretização extremamente simples e eficiente do solo considerado como um meio elástico semi-infinito. Todo o desenvolvimento efetuado encontra-se voltado para a sua inserção em um programa tradicional de elementos finitos de modo que se possa considerar a interação de estruturas com o solo.

Palavras-chave: Elementos de Contorno. Elementos Finitos. Interação Estrutura-Solo. Sapata.

ELEMENT FOR RIGID FOOTINGS DISCRETIZATION BASED ON BONDARY ELEMENT METHOD

Abstract

This work deals with the development of an element for discretization of rigid footings based on the Boundary Element Method. This element was developed using both Midlin and Bussinesq-Cerruti fundamental solution aiming a simple and efficient discretization of the soil as a semi-infinity elastic linear layer. The element is to be inserted in a traditional finite element program in order to consider the soil-structure interaction.

Keywords: Boundary Elements. Finite Elements. Soil-Structure Interaction. Footing.

1 INTRODUÇÃO

Quando uma estrutura se encontra apoiada sobre elementos de fundação direta, como por exemplo sapatas, a interação com o solo adquire grande importância. Isso ocorre porque a fundação direta é usualmente mais deformável e depende mais das condições do solo para um desempenho satisfatório. Assim sendo, a interação solo-estrutura para esses casos se reveste de uma importância especial.

O objetivo deste trabalho é exatamente apresentar um procedimento relativamente simples e altamente eficiente para solução desse tipo de interação. A superestrutura será discretizada através do Método dos Elementos Finitos, mais adequado às grandes variações de geometria e rigidez dos componentes estruturais, enquanto o solo será discretizado através do Método dos Elementos de Contorno, muito mais adequado para a modelagem de maciços estratificados ou não. Para tanto, considerar-se-á a estrutura de fundação será composta de sapatas rígidas, que farão o papel da interface entre a superestrutura e o solo.

Para a definição do elemento sapata, duas condições foram de fundamental importância: o tempo de processamento e a facilidade na entrada dos dados. Isso porque o objetivo principal deste elemento, realizar a interação solo-estrutura de edifícios sobre fundação direta tem um enfoque

¹ Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas - EESC-USP, ramalho@sc.usp.br

² Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, *in memoriam*

bastante prático. Este enfoque estaria comprometido se a entrada dos dados requeresse muito trabalho e o tempo computacional de execução do programa crescesse demais. Deve-se lembrar que exatamente essas condições são que inviabilizam a utilização de um elemento sólido convencional na consideração dessa interação. Assim sendo, procurou-se com a definição deste elemento, através do Método dos Elementos de Contorno, uma forma simples e, sobretudo, rápida de se considerar a mencionada interação.

A característica fundamental do elemento mencionado diz respeito à sua adaptação a um programa de Elementos Finitos, sem que haja um comprometimento do desempenho desse programa para todas as suas outras aplicações. Desse modo, optou-se por um processo pouco ortodoxo, mas eficiente, de se utilizar o Método dos Elementos de Contorno para a montagem da matriz de rigidez associada ao ponto onde se liga a sapata. Mais explicitamente, os passos principais desse processo podem ser resumidos nas seguintes etapas:

- a) Inicialmente define-se o elemento como composto de uma ou mais sapatas, cada uma ligada a um ponto nodal da superestrutura. Caso o elemento tenha mais de uma sapata, automaticamente será considerada a interação entre elas. Caso apenas uma sapata tenha sido definida para o elemento, seu comportamento será considerado independente das demais.
- b) O programa automaticamente realiza a discretização dessas sapatas, calculando todos os parâmetros necessários para a montagem de um sistema de equações através do Método dos Elementos de Contorno. O solo será considerado como um domínio semi-infinito, isotrópico, perfeitamente elástico e a sapata como sendo perfeitamente rígida.
- c) É calculada, pela definição, a matriz de rigidez correspondente a cada centróide de sapata. Isso se faz pela aplicação de deslocamentos e rotações unitários em cada um desses centróides, mas sempre em relação ao sistema global de referência. Esses deslocamentos e rotações são então transformados em deslocamentos para os nós que discretizam as sapatas, encontrando-se como resposta as forças de superfície nesses mesmos nós. A integração dessas forças de superfície produz como resultado uma matriz de coeficientes elásticos para cada um dos centróides.
- d) As matrizes de coeficientes encontradas no item anterior são então transportadas para os pontos nodais da superestrutura ligados a cada sapata. Depois as matrizes são simetrizadas e montadas nas devidas posições do sistema de equações globais da superestrutura, como é feito com todos os outros tipos de elementos. Então, a estrutura é calculada de forma convencional, apenas ressaltando-se que nos resultados obtidos se encontra automaticamente considerada a interação com o solo, da maneira mencionada.

Exatamente essas etapas é que estarão descritas, com detalhes, nos próximos itens deste texto.

2 FORMA E FUNÇÃO APROXIMADORA

Pode-se considerar que duas especificações são fundamentais para a definição deste elemento. A primeira é sua forma e a segunda a função aproximadora a ser utilizada.

Quanto à primeira, considerando-se que a entrada de dados de maneira simples e objetiva é uma característica fundamental e que a grande maioria das sapatas usualmente utilizadas é

retangular, foi essa exatamente a forma adotada. Assim, para uma definição completa da geometria do elemento são necessários os seguintes parâmetros:

dx_1 , dx_2 e dx_3 : distâncias entre o nó da estrutura e o centróide da sapata, segundo os eixos globais X_1 , X_2 e X_3 .

β : ângulo entre o eixo global X_1 e o eixo local x_1 , positivo quando em sentido horário.

C_1 e C_2 : dimensões das sapatas segundo os eixos locais x_1 e x_2 .

Todos esses parâmetros são apresentados na Figura 1. Como se pode observar na referida figura, os eixos locais são definidos com origem no centróide da sapata e orientados segundo direções paralelas aos seus lados. Ressalta-se ainda que, pelos parâmetros mencionados, a sapata é considerada contida num plano paralelo ao plano formado pelos eixos globais X_1 e X_2 , podendo apenas apresentar-se rotacionada em relação a esses eixos.

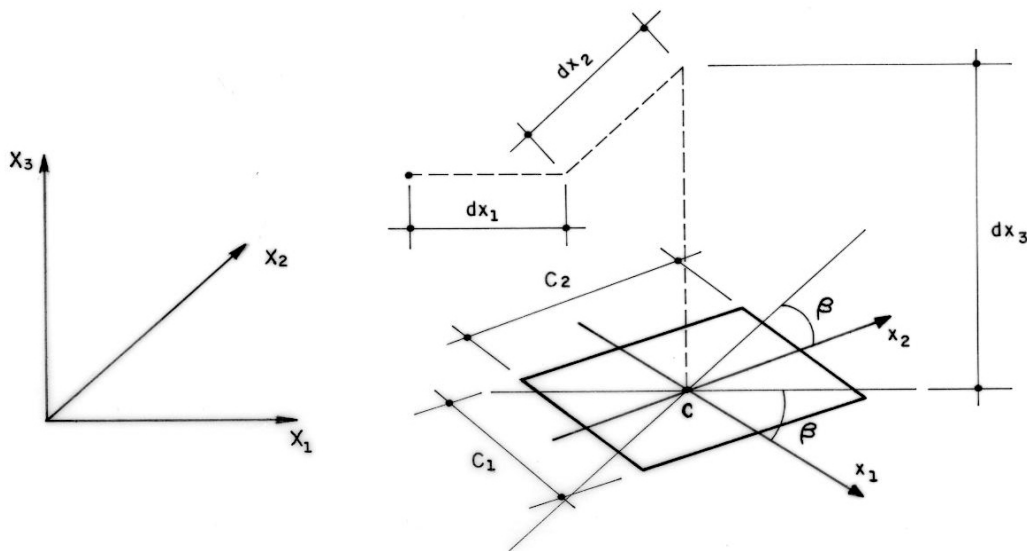


Figura 1 – Geometria da Sapata.

Menciona-se ainda que, como sistema de referência homogêneo auxiliar, foram adotados os eixos r e s , coincidentes com o sistema local de referência x_1 e x_2 e apresentados na Figura 2.

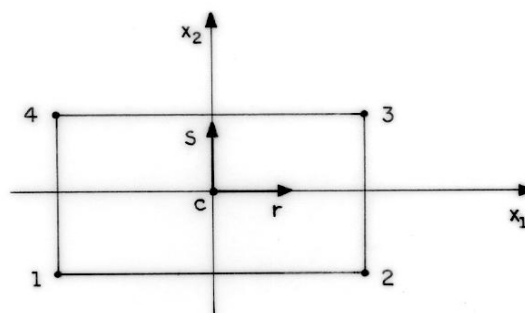


Figura 2 – Numeração de nós e sistema homogêneo.

Já quanto à função aproximadora, adotou-se que tanto a geometria como os deslocamentos "u" e forças de superfície "p" são aproximados pela mesma função. Além disso, a sapata é discretizada por apenas quatro nós, colocados em seus cantos e numerados de acordo com o esquema apresentado na já referida Figura 2.

Qualquer parâmetro de um ponto interno pode ser calculado em função dos valores desse parâmetro nos nós da sapata. Para isso, basta que se defina funções apropriadas a estas transformações. Essas funções são ponderadores cujo valor resulta 1 para o nó base da função e zero para todos os outros.

Existe toda uma família de funções para os diversos tipos de elementos retangulares de diferentes números de nós. Essa família é conhecida como família Serendípita [1]. Como foi adotado que o elemento aqui desenvolvido é discretizado por apenas quatro nós, o conjunto das quatro funções mencionadas pode ser escrito, em relação ao sistema homogêneo, da seguinte maneira, (ZIENKIEWICZ, 1980):

$$\begin{aligned} h^1 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\ h^2 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\ h^3 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\ h^4 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \end{aligned} \tag{1}$$

Graficamente, as funções (1) podem ser representadas conforme se mostra na Figura 3.

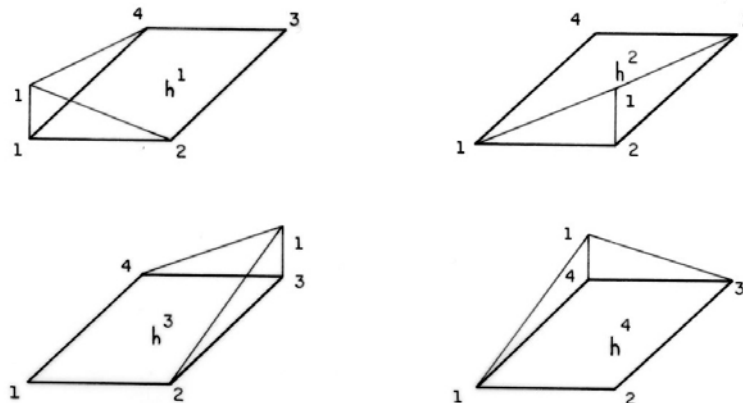


Figura 3 – Funções Interpoladoras.

3 PARÂMETROS INTERNOS EM FUNÇÃO DE VALORES NODAIS

Em primeiro lugar, é interessante ressaltar que a notação matricial, apesar de produzir expressões mais extensas, tem a vantagem de explicitar bem as operações desenvolvidas. Assim

sendo, ela será utilizada em paralelo com a notação indicial sempre que se considerar necessário imprimir maior clareza às deduções efetuadas.

As coordenadas de um ponto interno ao elemento podem ser escritas em função das coordenadas dos pontos nodais através da expressão:

$$X_i = h^j X_j^i \quad (2)$$

na qual:

X_i : coordenada de um ponto da sapata segundo o eixo "i"

h_j : funções interpoladoras definidas nas Eq. (1)

X_j^i : coordenada segundo o eixo "i" do ponto nodal "j".

Em termos matriciais pode-se escrever:

$$\tilde{X} = \tilde{H} \tilde{X}_n \quad (3)$$

na qual X é o vetor de coordenadas do ponto:

$$\tilde{X} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix}$$

Assim, H é a matriz de transformação, montada com as funções de interpolação da maneira que se segue:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} h^1 & h^2 & h^3 & h^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h^1 & h^2 & h^3 & h^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h^1 & h^2 & h^3 & h^4 \end{bmatrix}$$

Já X_n é o vetor que agrupa as coordenadas nodais do elemento da seguinte maneira:

$$\tilde{X}_n = \left\{ \begin{array}{c} X_1^1 \\ X_1^2 \\ X_1^3 \\ X_1^4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_3^1 \\ X_3^2 \\ X_3^3 \\ X_3^4 \end{array} \right\}$$

na qual X_i^j é a coordenada do nó "j" segundo o eixo "i".

Para os deslocamentos e forças de superfície, aproximações semelhantes podem ser utilizadas. Nesse caso, as expressões resultariam em:

$$u_i = h^j U_i^j \quad (4)$$

$$p_i = h^j P_i^j \quad (5)$$

nas quais:

u_i e p_i : componentes dos deslocamentos e forças de superfície para um ponto interno

U_i^j e P_i^j : valores nodais dos deslocamentos e forças de superfície

De forma semelhante ao que se mostrou para os valores de coordenadas, em termos matriciais as expressões resultam:

$$\tilde{U} = \tilde{H} \tilde{U}_n \quad (6)$$

$$\tilde{P} = \tilde{H} \tilde{P}_n \quad (7)$$

nas quais:

\tilde{U} e \tilde{P} : vetores que contém, respectivamente, os deslocamentos e forças de superfície segundo os três eixos globais para um ponto interior

\tilde{U}_n e \tilde{P}_n : vetores que agrupam, respectivamente, os deslocamentos e forças de superfície nodais de forma semelhante ao vetor X_n da Eq. (3).

Com as aproximações definidas, pode-se passar à discretização da equação integral que rege o fenômeno. Essa discretização é que resultará no sistema de equações que resolvido permitirá o conhecimento das variáveis importantes do problema.

4 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DO PROBLEMA

A equação integral completa que relaciona deslocamentos e forças para pontos do contorno de um dado domínio, (NAKAGUMA, 1979), pode ser simplificada considerando-se algumas condições particulares do problema aqui analisado.

Em primeiro lugar, pode ser desprezada a parcela referente às forças volumétricas, sem importância para as aplicações a serem aqui consideradas. Depois, deve-se considerar que a parcela que depende de P^* será sempre nula para os casos aqui tratados, devido às considerações que se faz a seguir.

Quando a sapata a ser considerada se apoiar sobre um plano livre de tensões, solução de Boussinesq-Cerruti, o valor dos componentes do tensor P^* será zero. Este, inclusive, é o caso mais comumente encontrado na prática, no qual a sapata apóia-se na cota do terreno escavado, desprezando-se o efeito de algum possível reaterro por considerar-se que essa providência na reconstituiu o terreno original.

Caso a cota de apoio da sapata seja considerada realmente dentro do domínio semi-infinito, solução de Mindlin, deve-se lembrar que na verdade a definição do contorno do elemento envolve a definição de seis planos, de r_1 a r_6 , conforme se apresenta na Figura 4.

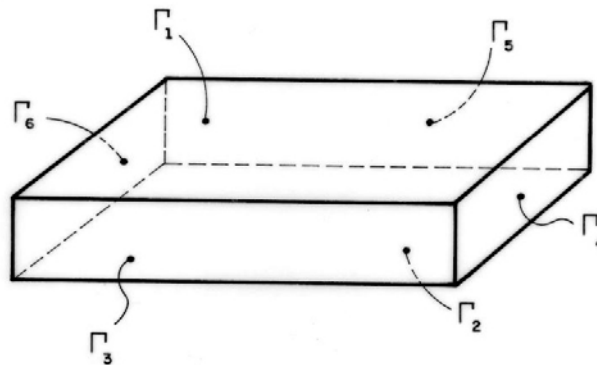


Figura 4 – Contorno da sapata.

Se for adotada a espessura da sapata igual a zero, isto é, r_1 e r_2 ocupando a mesma posição, as integrais restantes anulam-se para os contornos de r_3 a r_6 . Entretanto, para os contornos r_1 e r_2 anulam-se apenas as parcelas relativas a P^* , pois trata-se da integração de funções de mesmo valor e sinais contrários na mesma área.

Quanto à matriz $C_{ik}(S)$, a soma de $1/2 \delta_{ik}$ de uma superfície com $1/2 \delta_{ik}$ da outra produzirá o próprio δ_{ik} , ou seja, a matriz identidade. Portanto, seja usada a solução de Boussinesq-Cerruti ou Mindlin, a equação integral discretizada resume-se ao seguinte:

$$u_i(S) = \int_{\Gamma} U_{ik}^*(S, Q) p_k(Q) d\Gamma(Q) \quad (8)$$

Com a utilização da Eq. (4) e considerando-se que se tenha "L" sapatas para um determinado elemento obtém-se:

$$U_i^j = \sum_{l=1}^L \left[\int_{\Gamma_l} U_{ik}^* h^j p_k^j d\Gamma_l \right] \quad (9)$$

na qual:

U_i^j : deslocamento do ponto nodal "j" na direção "i"

Retirando-se da integral os valores que variam em relação à posição do elemento obtém-se:

$$U_i^j = \sum_{l=1}^L \left[\int_{\Gamma_l} U_{ik}^* h^j d\Gamma_l \right] p_k^j \quad (10)$$

A integral no contorno Γ_l pode ser calculada numericamente por Gauss através da consideração de "M" pontos, (STROUD & SECREST, 1966). Desse modo, pode-se escrever:

$$U_i^j = \sum_{l=1}^L \left[|J| \sum_{m=1}^M \left[\omega_m (U_{ik}^* h^j) \right] \right] p_k^j \quad (11)$$

na qual:

$|J|$: é o Jacobiano da transformação de coordenadas de $d\Gamma$ para $dr ds$. Esse valor, no caso de sapatas retangulares, é igual a $C_1 C_2 / 4$.

ω_m : é o fator de peso fornecido pelo processo de integração de Gauss. No caso. O ponto "m" tem a sua posição definida de acordo com o número de pontos a serem considerados para a integração.

Aplicando-se a Eq. (11) a todos os pontos nodais de um elemento, obtém-se um sistema de equações lineares que resolvido fornece os valores das forças de superfície para os pontos onde os deslocamentos são conhecidos. Para maior clareza, pode-se expressar esse sistema em termos matriciais da maneira que se segue:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \\ \tilde{u}^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{u}^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{13} & \cdot & \cdot & \tilde{G}_{1n} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} & \tilde{G}_{23} & \cdot & \cdot & \tilde{G}_{2n} \\ \tilde{G}_{31} & \tilde{G}_{32} & \tilde{G}_{33} & \cdot & \cdot & \tilde{G}_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{G}_{n1} & \tilde{G}_{n2} & \tilde{G}_{n3} & \cdot & \cdot & \tilde{G}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}^1 \\ \tilde{p}^2 \\ \tilde{p}^3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{p}^n \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Os vetores \tilde{u}^i contêm os deslocamentos do nó "i" segundo as três direções coordenadas, ou seja:

$$\tilde{u}^i = \begin{Bmatrix} U_1^i \\ U_2^i \\ U_3^i \end{Bmatrix} \quad (13)$$

Os vetores \tilde{p}^i são semelhantes a \tilde{u}^i , só que contendo as forças de superfície do nó "i". Já G_{ij} é uma matriz de ordem três que pode ser escrita como:

$$\tilde{G}_{ij} = |J| \sum_{m=1}^M [\omega_m (\tilde{U}^* h^j)_{im}] \quad (14)$$

na qual:

\tilde{U}^* : matriz de ordem três que contém a solução fundamental calculada do nó "i" ao ponto de Gauss "m".

Após as deduções aqui colocadas deve estar perfeitamente claro que se pode, através da imposição de deslocamentos para os pontos nodais, calcular as forças de superfície para esses mesmos pontos. Esse procedimento permitirá o cálculo da rigidez das sapatas pela definição, o que se encontra explicitado no próximo item.

5 CÁLCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DAS SAPATAS

Após a montagem do sistema de Eq. (12), o objetivo deste trabalho é o de calcular coeficientes que simulem a presença do solo e possam ser montados na matriz de rigidez global da superestrutura. Mais especificamente, para o sistema computacional aqui desenvolvido, trata-se de determinar os referidos parâmetros de rigidez associados aos seis graus de liberdade de cada nó com sapata associada. Isso produz uma matriz de ordem $6N$, sendo "N" o número de nós da superestrutura ou de sapatas, presentes no elemento.

Inicialmente a rigidez será determinada sempre em relação ao centróide da sapata, mas de acordo com o sistema global de referência. Portanto, a transferência dessas rigidezes para o nó da

superestrutura envolverá apenas as transformações relativas às translações entre o centróide e o nó. Essas transformações serão realizadas em estágio posterior e encontram-se detalhadas no próximo item.

Como foi mencionado, existem seis graus de liberdade a serem considerados para cada sapata: três translações segundo X_1 , X_2 e X_3 e três rotações em torno desses mesmos eixos. Para o cálculo dos coeficientes de rigidez deve-se impor a cada um desses graus de liberdade, de forma independente, um movimento unitário, conforme mostrado na Figura 5.

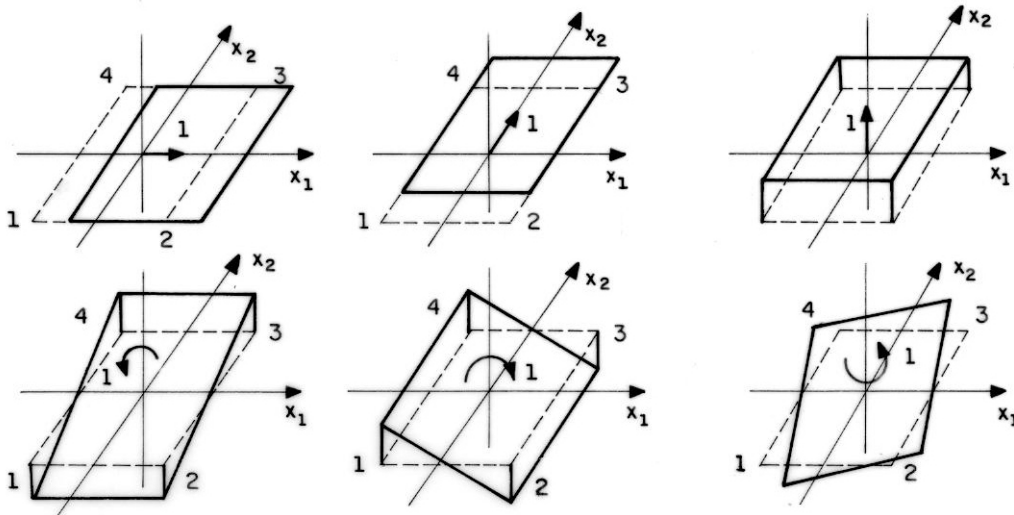


Figura 5 – Movimentos unitários de uma sapata.

Cada movimento será então transformado em três deslocamentos para cada um dos quatro nós que definem a sapata. Os vetores para os seis carregamentos mencionados podem ser expressos, em sua forma transposta, da maneira que se segue:

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_1^T &= \{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\} \\
 \tilde{U}_2^T &= \{0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0\} \\
 \tilde{U}_3^T &= \{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1\} \\
 \tilde{U}_4^T &= \{0 \ 0 \ A_1 \ 0 \ 0 \ A_2 \ 0 \ 0 \ A_3 \ 0 \ 0 \ A_4\} \\
 \tilde{U}_5^T &= \{0 \ 0 \ B_1 \ 0 \ 0 \ B_2 \ 0 \ 0 \ B_3 \ 0 \ 0 \ B_4\} \\
 \tilde{U}_6^T &= \{C_1 \ D_1 \ 0 \ C_2 \ D_2 \ 0 \ C_3 \ D_3 \ 0 \ C_4 \ D_4 \ 0\}
 \end{aligned} \tag{15}$$

nas quais:

\tilde{U}_i : vetor correspondente ao i -ésimo carregamento de uma determinada sapata.

Já os parâmetros A, B, C e D são distâncias dadas pelas expressões:

$$A_i = X_2 (\text{nó } i) - X_2 (\text{centróide})$$

$$B_i = X_1 (\text{centróide}) - X_1 (\text{nó } i)$$

$$C_i = X_2 (\text{centróide}) - X_2 (\text{nó } i)$$

$$D_i = X_1 (\text{nó } i) - X_1 (\text{centróide})$$

Após essa etapa, o conjunto formado pelos deslocamentos obtidos para os nós da sapata considerada e mais três valores nulos para cada nó de outras sapatas constitui um vetor que deve ser levado ao sistema (12). Quando todos os movimentos unitários tiverem sido considerados, ter-se-á um total de $6N$ vetores.

A solução do sistema é realizada pelo processo de triangularização de Gauss, com os $6N$ vetores considerados simultaneamente. Assim, pode-se independentemente considerados simultaneamente. Assim, pode-se conhecer os valores das forças de superfície para cada nó de todas as sapatas, valores esses organizados em um vetor para cada movimento unitário. A integração numérica desses valores, sempre em relação ao centróide e tendo como referencia o sistema global, produz a matriz de rigidez do elemento.

Após o procedimento aqui descrito, resta apenas operar as ultimas transformações na referida matriz e realizar sua montagem na matriz de rigidez global da superestrutura.

6 TRANSLAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

Uma rigidez calculada para um determinado ponto pode ser transferida para outro através de transformações convenientes, (MEEK, 1971). Supondo os pontos O e \bar{O} separados por distâncias dx_1 , dx_2 e dx_3 e referenciados, respectivamente, pelos sistemas X_1 , X_2 e X_3 e \bar{X}_1 , \bar{X}_2 e \bar{X}_3 , conforme se mostra na Figura 6, pode-se escrever para a transferência de forças e momentos atuantes dos pontos \bar{O} para O :

$$S = T \bar{S} T^T \quad (16)$$

na qual:

S : matriz de rigidez transladada

T : matriz de translação

\bar{S} : matriz de rigidez original

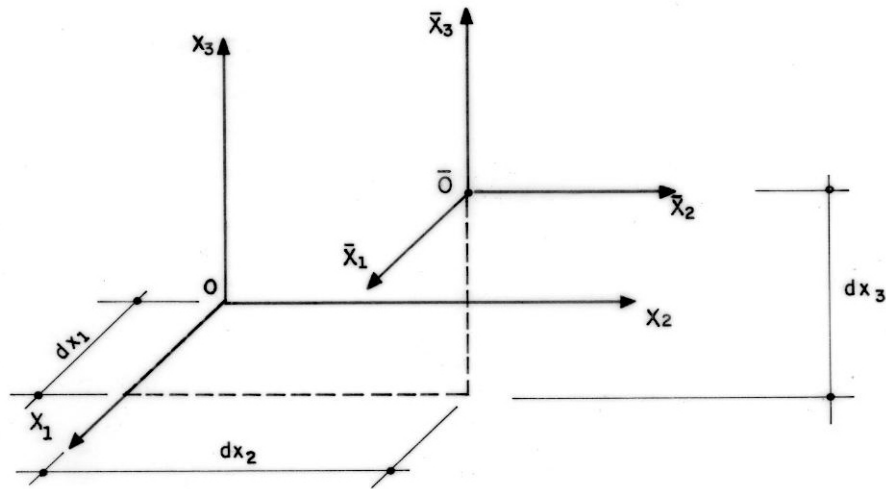


Figura 6 – Translação da matriz de rigidez.

A Eq. (16) mostra como transladar uma matriz de rigidez calculada inicialmente num ponto \bar{O} para o ponto O . Aqui a expressão será utilizada para transladar a matriz de rigidez do elemento montada em relação ao centróide de cada sapata para os nós da superestrutura. Somente após essa translação ela será adicional à matriz de rigidez global da superestrutura.

Para se realizar essa translação é necessário se recordar que a matriz total é composta de N^2 submatrizes, sendo N o número de sapatas ou de nós da superestrutura. Nesse caso, a transformação de rigidez para os nós da superestrutura pode ser realizada através da expressão:

$$\tilde{S}_{ij} = \tilde{T}_i \tilde{S}_{ij} \tilde{T}_j^T \quad (17)$$

na qual:

\tilde{S}_{ij} : são as sub-matrizes já transladadas para os pontos da superestrutura

\tilde{S}_{ij} : são as sub-matrizes ainda referidas ao centróide de cada elemento sapata

\tilde{T}_i : são as matrizes de transformação que relacionam as rigidezes no centróide com as rigidezes no nó da superestrutura para a sapata “j”.

7 SIMETRIZAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

A matriz obtida para o elemento sapata através do Método dos Elementos de Contorno (MEC.) tem a característica de não apresentar simetria em relação à diagonal principal. Já a matriz da superestrutura, obtida através do Método dos Elementos Finitos (MEF), tem como uma das suas principais características exatamente essa simetria. O problema de como realizar a compatibilização

entre as matrizes obtidas através desses dois métodos distintos tem se caracterizado numa preocupação constante para os pesquisadores que trabalham com o acoplamento do MEC com o MEF.

Existem diversas maneiras de resolvê-lo, (RAMALHO, 1990), mas o procedimento aqui adotado é o que se encontra em (BREBBIA & GEORGIU, 1979) e pode ser considerado o mais simples e, provavelmente, o menos preciso.

Trata-se de simetrizar a matriz após a sua montagem utilizando-se a média dos valores de um lado e de outro da diagonal. Portanto, é um procedimento que procura otimizar o chamado erro médio, não sendo considerado o mais conveniente em alguns casos.

Entretanto, para este caso aqui estudado, no qual os valores obtidos para a diagonal são muito preponderantes em relação aos demais, ele pode ser realmente defensável, principalmente levando-se em conta a sua simplicidade e o fato de não necessitar de modificações no algoritmo de solução do sistema de equações.

Sendo assim, esse foi o procedimento de simetrização adotado, podendo-se escrever simplesmente:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} (S_{ij} + S_{ji}) \quad (18)$$

na qual:

S_{ij} : elementos da matriz de rigidez para a linha "i" e coluna "j".

Após esse processo de simetrização a matriz de rigidez do elemento sapata pode ser montada de forma tradicional na matriz de rigidez da superestrutura.

8 REFERÊNCIAS

- BREBBIA, C. A; GEORGIU, P. **Combination of Boundary and Finite Element in Elastostatics**. Applied Mathematic Modelling, V. 3. 1979.
- MEEK, J. L. **Matrix Structural Analysis**. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1971.
- NAKAGUMA, R. K. **Three Dimensional Elastostatics Using the Boundary Element Method**, Ph.D. Thesis. University of Southampton. 1979.
- RAMALHO, M. A. **Sistema para Análise de Estruturas Considerando a Interação com o Meio Elástico**. Tese de Doutorado. ESSC Universidade de São Paulo. 1990.
- STROUD, A. H.; SECREST, D. **Gaussian Quadrature Formula**. New York: Prentice Hall, 1966.
- ZIENKIEWICZ, O. C. **El Método de los Elementos Finitos**. Barcelona: Ed. Reverté, 1980.

