ISSN 1809-5860

ANÁLISE DE DOMÍNIOS REFORÇADOS CONSIDERANDO MODELOS DE ADERÊNCIA

Fabio Carlos da Rocha[1] & Wilson Sergio Venturini[2]

Resumo

Neste trabalho, uma combinação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) com o Método dos Elementos Finitos (MEF) é apresentada para análise bidimensional de sólidos elastostáticos reforçados, sendo considerados modelos de aderência no acoplamento. O elemento de contorno é adotado para modelar o comportamento do domínio, enquanto que o modelo por elementos finitos é utilizado para modelar o enrijecedor. Para a formulação do acoplamento, um polinômio do terceiro grau é adotado para aproximar tanto o campo de deslocamento quanto a rotação do enrijecedor, enquanto aproximações lineares são usadas para representar a força de contato entre o domínio e o enrijecedor. Modelos de escorregamento, apresentados, relacionam o deslocamento relativo e a força de contato linearmente. Através de exemplo é mostrado o acoplamento entre os dois materiais.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno. Acoplamento MEC/MEF. Modelos de aderência.

ANALYSIS OF DOMAINS REINFORCED CONSIDERING MODELS OF ADHERENCE

Abstract

In this work, it is presented a coupling between the Boundary Element Method and the Finite Element Method for two-dimensional elastostatic analysis of reinforced bodies considering adherence. The Boundary Element is used to model the matrix while the reinforcement is modeled by the Finite Element. Regarding the coupling formulation a third degree polynomial is adopted to describe the displacements and rotations of the reinforcement, while a linear polynomial is used to describe the contact forces among the continuum and the reinforcement. Adherence (or sliding) models are presented and implemented in the computer code. A linear relation between relative displacement and transmitted force is adopted. Examples shown the coupled situations.

Keywords: Boundary Element Method. BEM/FEM coupling. Adherence models.

1 INTRODUÇÃO

Em projetos de Engenharia Estrutural a simulação numérica possui um papel de crescente importância. Isto pode ser atribuído ao rápido avanço de poderosos computadores e de *softwares* de qualidade resultando na diminuição do custo da simulação computacional comparado aos elevados custos e/ou dificuldades práticas dos experimentos. Porém, para complementar ou até mesmo substituir experimentos, a simulação deve ter um elevado grau de eficiência, precisão e confiabilidade. Esse elevado grau de exigência pode não ser dependente somente do modelo físico e matemático que é escolhido para o sistema real que se deseja simular, mas também na escolha da própria ferramenta de simulação, por exemplo, Método dos Elementos de Contorno, e em habilidades de utilizá-lo.

[1] Mestre em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, fabcivil@sc.usp.br
[2] Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, venturin@sc.usp.br

O próximo passo é traduzir o modelo físico em um modelo matemático. O modelo físico pode ser representado matematicamente de várias maneiras, então é feita uma escolha pela representação que satisfaça as necessidades do problema, por exemplo, pela seleção de um sistema de coordenadas apropriado, as unidades e as variáveis independentes. Isto conduz a uma descrição matemática particular para o problema de equações diferenciais ou integrais, aplicando as descrições matemática do contorno e das condições iniciais das restrições adicionais (por exemplo, restrições cinemáticas em problemas de contato).

O processo de modelagem é muito importante, e é neste momento que se determina o melhor resultado que se pode obter em qualquer ferramenta numérica. Qualquer erro no processo de modelagem aparecerá na solução numérica, pois o programa somente resolve a equação matemática e não pode verificar se a simulação do fenômeno físico está adequada. Porém, quando se tem um bom modelo matemático, a escolha de uma metodologia apropriada para a obtenção da solução é muito importante para minimizar o pré-processamento (tradução do modelo matemático para o computador, que envolve a geração da geometria e da malha) computacional e o custo no processo da análise.

Para que seja obtido sucesso na resolução numérica do problema é necessário o completo conhecimento da ferramenta numérica que está sendo usada, onde o processo de solução freqüentemente não é direto. Vários parâmetros têm que ser escolhidos, alguns dos quais aumentam a velocidade no processo da solução, enquanto outros podem não conduzir a soluções possíveis ou podem resultar em soluções erradas quando aplicados incorretamente.

Quando a análise numérica é completada, os resultados têm que ser analisados e julgados com o senso comum e a experiência, podendo também ser comparados a experimentos e a outros resultados numéricos.

Quando se está convencido que realmente encontrou um resultado preciso para o modelo matemático, deve-se interpretar estes resultados pelo ponto de vista físico para verificar se esta solução é também uma boa aproximação para o fenômeno que se espera simular. Quando este não é o caso, faz-se necessário modificar ou substituir o modelo físico em que a análise está baseada.

Por fim, se obtém uma solução na Engenharia para o processo real que se deseja simular. Com isso, o processo de análise é finalizado e o resultado pode ser usado em projetos. Isto pode conduzir a uma confirmação do projeto estrutural ou indicar onde e como modificações poderiam ser feitas.

2 EQUAÇÕES BÁSICAS E MODELOS DE ADERÊNCIA

Neste item será abordado as equações básicas do Método dos Elementos Finitos e os modelos de aderência utilizados neste trabalho.

2.1 Equações básica

O elemento finito de pórtico não convencional foi utilizado para modelar os enrijecedores. Este elemento possui três graus de liberdades por nó e a aproximação cúbica para as variáveis de deslocamento e rotação é utilizada. Sendo assim, o elemento possui 4 nós, sendo que para cada um dos nós são estabelecidas duas translações (vertical e horizontal) e uma rotação. Foi empregada a cinemática geral de Reissner desenvolvida para elementos laminados (Paccola, 2004) utilizado anteriormente por (Wutzow; Venturini, 2004).

Para modelar os enrijecedores, empregou a cinemática para o elemento de pórtico bi-dimensional semelhante a desenvolvida por (Pacolla, 2004) para estudo de pórticos e laminados em geral.

Para um ponto qualquer de uma viga as componentes horizontais e verticais dos deslocamentos são dadas por:

$$u_p(x,y) = u_0(x) + \theta_0(x).y \tag{1}$$

$$v_p(x,y) = v_0(x) \tag{2}$$

Sendo x e y o sistema de referência no centro da camada. Para facilitar o entendimento das expressões apresentadas nas Eq. (1) e Eq. (2), a Figura 1 ilustra o deslocamento do ponto P em relação ao eixo do elemento.

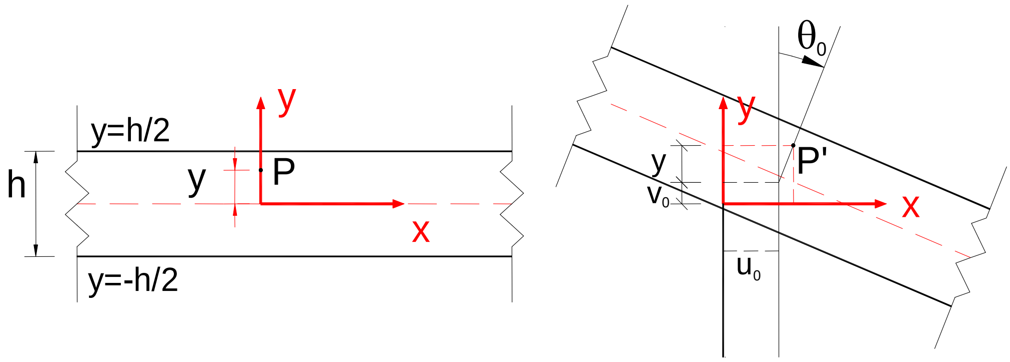

Figura 1 – Cinemática de um ponto “P” qualquer. (WESLEY, 2008).

Obtido os deslocamentos através das expressões cinemáticas adotadas para o problema, pode-se então determinar as deformações em função das derivadas das equações cinemáticas.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(x,y) &= \frac{\partial u_p(x,y)}{\partial x} \\
\varepsilon_y(x,y) &= 0 \\
\varepsilon_{xy}(x,y) &= \frac{\gamma xy}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_p(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v_p(x,y)}{\partial x}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

Aplicando a lei constitutiva para os materiais, obtêm as tensões para o ponto P do elemento de viga:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= E.\varepsilon_x \\
\sigma_y &= 0 \\
\tau_{xy} &= G.\gamma_{xy}
\end{aligned} \tag{4}$$

O equilíbrio é introduzido a partir do Princípio da Mínima Energia Potencial. Assim, tem-se:

$$U_e = \int \left(\frac{1}{2} \left(\varepsilon_x \sigma_x + \gamma_{xy} \tau_{xy} \right) \right) dV \tag{5}$$

$$U_e = \int_{-1}^{1} \left(\int_A \left(G \left(\theta_0(\xi) + \frac{2v_0'(\xi)}{L} \right)^2 + \frac{4E\left(u_0'(\xi) + y\theta_0'(\xi)\right)^2}{L^2} \right) dA \right) d\xi \tag{6}$$

A parcela de energia referente ao carregamento distribuído pode ser descrito como sendo:

$$U_p = \int_{-1}^{1} \left(t_x u_0^x + t_y u_0^y \right) d\xi \tag{7}$$

Portanto o funcional de energia completo, contendo a parcela de carregamento distribuído, é descrito por:

$$\Pi = U_e - U_p \tag{8}$$

ou

$$\Pi = \int \left(\frac{1}{2} \left(\varepsilon_x \sigma_x + \gamma_{xy} \tau_{xy} \right) \right) dV - \int \left(t_x u_0^x + t_y U_0^y \right) dx \tag{9}$$

Neste trabalho foram utilizadas aproximações cúbicas independentes para os deslocamentos u_0, v_0 e θ_0 mostradas:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{4} \bar{\phi}_i^u u_0^i$$
$$v_0 = \sum_{i=1}^{4} \bar{\phi}_i^v v_0^i$$
$$\theta_0 = \sum_{i=1}^{4} \bar{\phi}_i^\theta \theta_0^i \tag{10}$$

Sendo $\bar{\phi}_i^u = \bar{\phi}_i^v = \bar{\phi}_i^\theta = \bar{\phi}_i$, onde $\bar{\phi}_i$ são as funções de forma apresentadas na Eq. (11):

$$\bar{\phi}_1(\xi) = -\frac{9}{16}\left(\xi + \frac{1}{3}\right)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi - 1)$$
$$\bar{\phi}_2(\xi) = +\frac{27}{16}(\xi + 1)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi - 1)$$
$$\bar{\phi}_3(\xi) = -\frac{27}{16}(\xi + 1)\left(\xi + \frac{1}{3}\right)(\xi - 1)$$
$$\bar{\phi}_4(\xi) = +\frac{9}{16}\left(\xi + \frac{1}{3}\right)\left(\xi - \frac{1}{3}\right)(\xi + 1) \qquad \text{com} \quad -1 \le \xi \le +1 \tag{11}$$

No referente às forças na interface do acoplamento (t_x e t_y) são adotadas aproximações lineares:

$$t_x = \sum_{i=1}^{2} \phi_i^{t_x} t_x^i, \qquad t_y = \sum_{i=1}^{2} \phi_i^{t_y} t_y^i \qquad \text{sendo} \quad \phi_i^{t_x} = \phi_i^{t_y} = \phi_i \tag{12}$$

Onde;

$$\phi_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}$$
$$\phi_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad \text{com } -1 \le \xi \le +1 \tag{13}$$

Utilizando as aproximações acima e minimizando-se o funcional de energia, Eq. (8), chega-se ao sistema algébrico de equações dadas da seguinte forma:

$$\left[K^E\right]_{3NFx3NF}\left\{U^E\right\}_{3NFx1} = \left[G^E\right]_{3NFx2NF_{extr}}\left\{f^E\right\}_{2NF_{extr}x1} + \{F\}_{3NFx1} \tag{14}$$

Onde:

$\left[K^E\right]$ é a matriz de rigidez do MEF;

$\left[G^E\right]$ é a matriz referente às cargas distribuídas;

$\left\{U^E\right\}$ é o vetor com as incógnitas de deslocamento (translações e rotação);

$\left\{f^E\right\}$ vetor de forças distribuídas;

$\left\{F\right\}$ vetor de forças concentradas nodais;

NF é o número de nós de finitos (quatro por elementos);

NF_{extr} é o numero de nós das extremidades dos elementos finitos.

2.2 Modelos de aderência

Enrijecedores embutidos no domínio pode ser uma importante situação para modificar a rigidez do sólido e a capacidade de suportar carregamento, caso as forças transmitidas entre os dois materiais forem adequadas. A situação ideal onde ocorre a aderência perfeita é impossível na prática, pois na vizinhança das extremidades do enrijecedor onde as forças da interface tendem ao infinito, ocorrendo o escorregamento.

Para considerar o efeito da perda de aderência entre o enrijecedor/domínio podem ser considerados modelos que descrevem este escorregamento entre os dois materiais. O objetivo deste trabalho é apenas mostrar a viabilidade de inserir qualquer modelo de aderência considerando a formulação descrita abaixo considerando o acoplamento entre o MEC e o MEF. Como exemplos são mostrados dois modelos que foram utilizados neste trabalho, lembrando que todos os modelos possuem relação linear entre o deslocamento relativo e as forças de transferência.

O primeiro modelo apresentado é o modelo constante com um único patamar, possuindo apenas um par de parâmetros ao modelo que são o S e o f_{max}. Onde S é o deslocamento relativo entre os dois materiais e f_{max} é a máxima força de aderência. Este modelo, mostrado na Figura 2, descreve situações em que uma vez atingido a máxima força de aderência, a capacidade de transferência de esforços permanece constante entre os materiais.

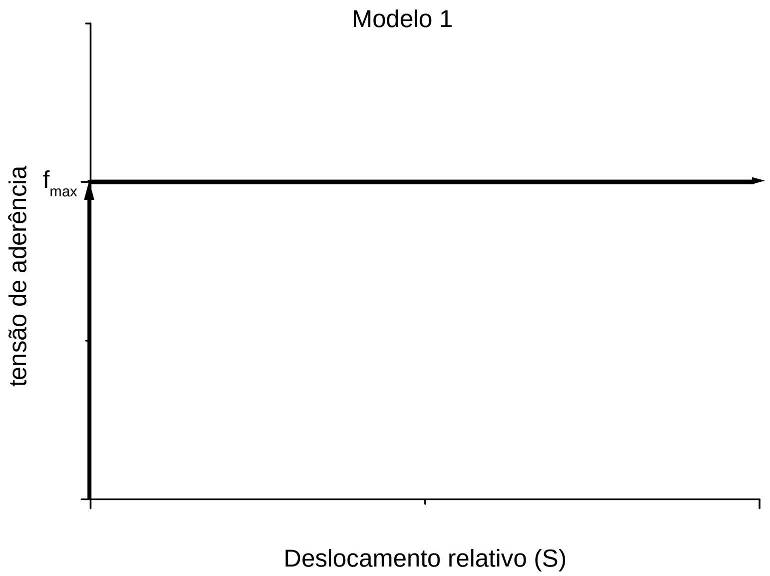

Figura 2 – Gráfico da tensão de aderência pelo deslocamento relativo (S) – MODELO 1.

O segundo modelo, apresentado na Figura 3, consiste de dois patamares e uma região de declive. Esta representação tem como parâmetros os pares $(S_1, f_{\max})$ e (S_2, f_{res}), onde os S_i para $i = 1, 2$ são os deslocamentos relativos entre os materiais, e $f_{\max}$ e f_{res} são as forças máximas e residuais do acoplamento, respectivamente. Este modelo simula, em um primeiro momento, situações onde se tem uma aderência perfeita do enrijecedor e o domínio até atingir a $f_{\max}$, atingido este valor ocorre um aumento no deslocamento relativo para uma mesma força transferida, mas a partir de S_1 as forças de transferências começam a diminuir até atingir um deslocamento relativo S_2, onde é obtida a força final ou residual do modelo, daí em diante a transferência da força de contato permanece constante e igual a força residual.

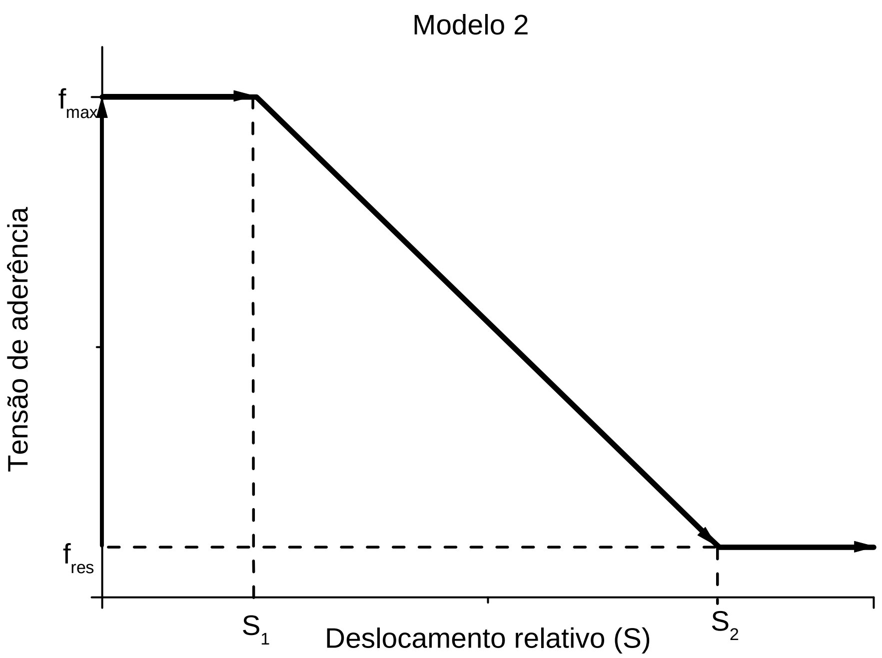

Figura 3 – Gráfico da tensão de aderência pelo deslocamento relativo (S) – MODELO 2.

3 ACOPLAMENTO MEC//MEF CONSIDERANDO O EFEITO DO ESCORREGAMENTO

Neste artigo é abordado os dois métodos numéricos mais utilizados em problemas de Engenharia, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF). Apesar da grande utilização desses dois métodos, estes possuem limitações em análise de alguns tipos de problemas.

Com o objetivo de melhor aproveitar os dois métodos numéricos, neste trabalho é realizado o acoplamento dos mesmos. A técnica do acoplamento realizado nesta dissertação é semelhante ao apresentado nos trabalhos de (Botta, 2003) e (Leonel, 2009). A diferença é que nos trabalhos de (Botta, 2003) e (Leonel, 2009) foram utilizados elementos de barra com um único grau de liberdade de deslocamento paralelo ao eixo da barra. Já neste trabalho, utilizam-se elementos com três graus de liberdade por nós, dois para deslocamento e uma para rotação.

Para que o problema possa ser resolvido, utiliza-se um procedimento simples baseado na técnica dos mínimos quadrados. Como o número de equações é maior que o de incógnitas, é necessário reduzi-lo a um número conveniente. A técnica dos mínimos quadrados consiste em obter a melhor solução que aproxima à resposta do sistema de equação, fazendo desta forma a minimização, em uma determinada norma, do vetor residual **r**, onde $\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$. Como conseqüência desta minimização é reduzido o número de equações, tornando o sistema linear resolvível e ainda podendo minimizar o erro da resposta quando levada ao sistema original (SÜLI; MAYER, 2007).

O problema do escorregamento introduz através de uma variável nas equações de compatibilidade de deslocamentos, esta variável S é a responsável pelo escorregamento relativo entre o domínio e o enrijecedor. As equações de compatibilidade são expressas por:

$$\{f^D\} = -\{f^E\} = \{f\} \tag{15}$$

$$U^E = U$$
$$U^D = U^E + S \Rightarrow U^D = U + S \tag{16}$$

Ou seja, o deslocamento relativo S foi aproximado por elementos lineares e introduzido nas equações de equilíbrio do MEC para pontos internos. Os campos com os deslocamentos U e S da Eq. (16) são independentes entre si, e podem ser aproximados por polinômios diferentes sobre cada elementos de barra. O deslocamento U é aproximado pelo mesmo polinômio cúbico definido no item 2.1. O deslocamento relativo S foi aproximado linearmente nesta formulação, como já informado. A razão desta escolha é por ser o mesmo polinômio que aproxima as forças de superfície no elemento. Para este caso, os nós das aproximações das forças de superfície e do escorregamento devem coincidir, com base no modelo de aderência utilizado.

Sabendo que as equações do MEF são desenvolvidas em coordenadas locais e as do MEC em coordenadas globais e tendo as equações do MEC possuindo dois graus de liberdade por nó e o MEF três graus de liberdade é necessário realizar a compatibilização das dimensões e o sistema de referência. Diante deste fato a Eq. (16) pode ser reescrita na seguinte forma matricial:

$$\{U^D\}_{2NFx1} = [T]_{2NFx3NF}[R]_{3NFx3NF}\{U\}_{3NFx1} + [\bar{T}]_{2NFx2NFextr}\{S\}_{2NFextrx1} \tag{17}$$

Onde:

NF = número de nós de elementos finitos

NF_{extr} = número de nós extremos do elemento finito

$[\mathrm{T}]$ é a matriz que relaciona a posição dos nós de $\{\mathrm{u}^{\mathrm{D}}\}$ e $\{\mathrm{u}\}$

$\left[\bar{\mathrm{T}}\right]$ é a matriz que relaciona a posição dos nós de $\left\{\mathrm{u}^{\mathrm{D}}\right\}$ e $\left\{\mathrm{S}\right\}$

$\left[\mathrm{R}\right]$ é a matriz de rotação do sistema local para o global de referência

Com a introdução do escorregamento relativo S, a equação de equilíbrio do elemento de contorno (Brebbia, 1978) para pontos internos ao domínio deve ser reescrita como:

$$[H_{EB}]\{U_b\}+[R][T]\{U^E\}+[R][\bar{T}]\{S\}=[G_{EE}]\{P_b\}+[G_{EE}]\{f^D\} \tag{18}$$

O sistema fica:

$$\begin{cases} [A_{bb}]\{X\}=[B_{bb}]\{F_b\}-[G_{EE}][\bar{R}]\{f^E(S)\} \\ [A_{Eb}]\{X\}+[R][T]\{U^E\}+[R][\bar{T}]\{S\}=[B_{Eb}]\{F_b\}-[G_{EE}][\bar{R}]\{f^E(S)\} \\ [\bar{K}^E]\{U^E\}=[\bar{G}^E]\{f^E(S)\}+\{\bar{F}\} \end{cases} \tag{19}$$

Onde: $\{f^D\}=-\{f^E(S)\}$ e $\{f^E(S)\}$ depende do modelo de aderência que é função do deslocamento relativo S. E $\{\bar{F}\}$ representa o vetor de carregamento nodal do MEF. Tendo a matriz $[\bar{K}^E]$, $[\bar{G}^E]$ e o vetor $\{\bar{F}\}$ referenciado ao sistema de coordenada local.

A representação matricial aplicando o método dos mínimos quadrados ao sistema 19 fica:

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{K}^E] & [0] \\ [G^*_{EE}][A_{Eb}] & [G^*_{EE}][R][T] & [G^*_{EE}][R][\bar{T}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ U^E \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{bb} \\ 0 \\ [G^*_{EE}][B_{Eb}] \end{bmatrix} \{F_b\} + \begin{bmatrix} -[G_{bE}][\bar{R}] \\ [\bar{G}^E] \\ -[G^*_{EE}][G_{EE}][\bar{R}] \end{bmatrix} \{f^E(S)\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

Neste trabalho foi utilizada a formulação incremental com controle de passos de carga ou deslocamento para poder obter o histórico de evolução da estrutura e verificar se as forças de interação entre o MEC e o MEF estão seguindo os modelos adotados, quando estes atingem suas forças de superfícies máximas. Assim a Eq. (19) fica na forma incremental:

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [0] & [0] \\ [0] & [\bar{K}^E] & [0] \\ [G^*_{EE}][A_{Eb}] & [G^*_{EE}][R][T] & [G^*_{EE}][R][\bar{T}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta U^E \\ \Delta S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{bb} \\ 0 \\ [G^*_{EE}][B_{Eb}] \end{bmatrix} \{\Delta F_b\} + \begin{bmatrix} -[G_{bE}][\bar{R}] \\ [\bar{G}^E] \\ -[G^*_{EE}][G_{EE}][\bar{R}] \end{bmatrix} \{\Delta f^E(S)\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta\bar{F} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste exemplo considera-se a análise da perda de aderência de uma barra embutida num domínio plano. A estrutura considerada é apresentada na Figura a qual é solicitada mediante a prescrição de um carregamento no nó de extremidade do enrijecedor. A carga aplicada na estrutura é equivalente a um deslocamento imposto de valor igual a $4{,}0.10^{-7}\mathrm{m}$. As dimensões geométricas adotadas foram $H=1{,}0m$, $L_o=4{,}0m$ e $L=5{,}0m$, analisando o efeito do escorregamento da barra em um meio elástico.

A discretização utilizada foi de 120 elementos lineares para o Método dos Elementos de Contorno e para o enrijecedor foi utilizado 100 elementos finitos.

As propriedades dos materiais adotadas para o exemplo são as seguintes: para o domínio $E_D = 2,8.10^{10}\, N/m^2$, $\nu = 0,0$. e para o enrijecedor foi adotado $E_F = 2,8.10^{11}\, N/m^2$, $I_F = 1,79.10^{-7}\, m^4$ e $S_F = 1,29.10^{-2}\, m^2$. Foi considerado neste exemplo o MODELO 2 que possui os seguintes parâmetros: $S_1 = 1,0.10^{-9}\, m$, $S_2 = 1,0.10^{-8}\, m$, $f_{max} = 1,40.10^2\, N/m^2$ e $f_{res} = 1,30.10^2\, N/m^2$.

Figura 4 – Estrutura analisada.

Na Figura 4 é apresentado as curvas com as forças de superfície (N/m^2) ao longo do comprimento do enrijecedor para nove valores diferentes de deslocamento prescrito, mostrando assim a evolução da ação de arrancamento da barra em instantes diferentes.

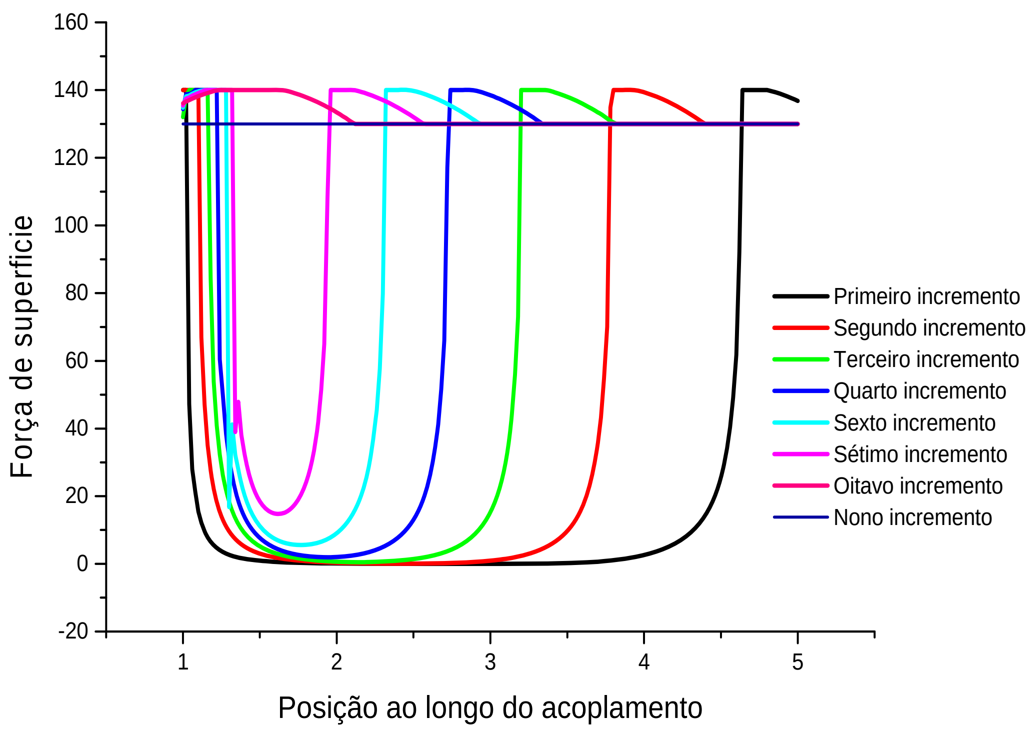

Figura 5 – Gráfico da evolução das forças de superfície ao longo da região acoplada.

Na Figura 6 são apresentadas as curvas com os deslocamentos, em metros(m), dos pontos do meio contínuo localizado na interface com o enrijecedor. Verifica-se a diminuição no deslocamento, nos pontos localizados próximos à aplicação da carga, à medida que o carregamento evolui.

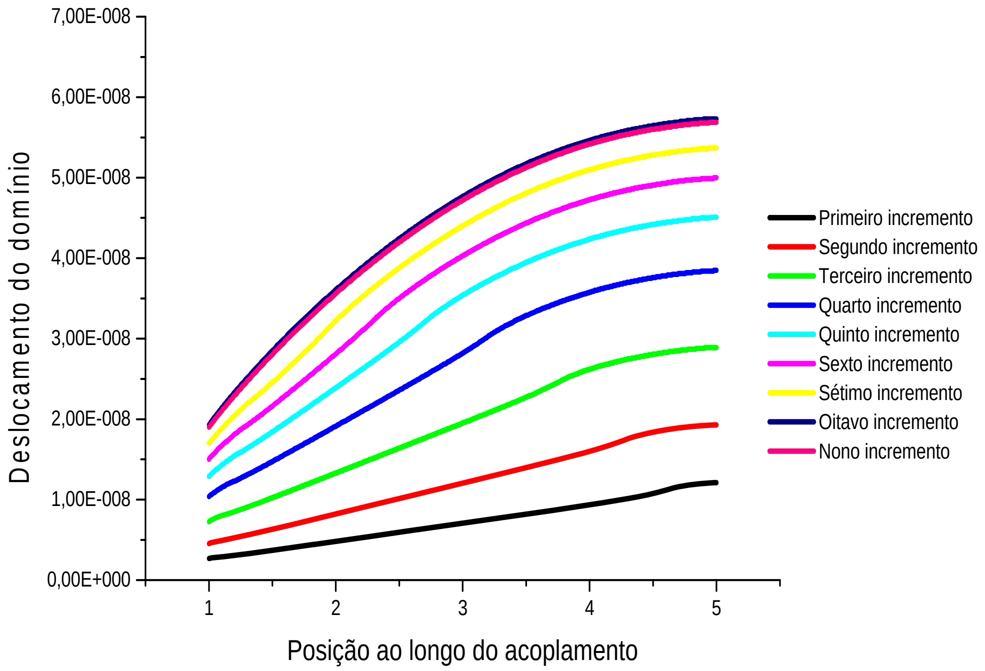

Figura 6 – Evolução dos deslocamentos do domínio ao longo da interface.

Os gráficos apresentados na Figura 7 mostram a evolução da perda de aderência, através do desacoplamento dos deslocamentos do domínio e do enrijecedor.

A Figura 7 ilustra perfeitamente a evolução da perda de aderência, em que os deslocamentos do domínio não são mais iguais aos deslocamentos do enrijecedor. No primeiro incremento de deslocamento, verifica-se quase que todos os nós estão perfeitamente acoplados, exceto os da extremidade. À medida que vai aumentando o deslocamento outros nós começam a desacoplar até chegar à situação do nono incremento quando os deslocamentos do enrijecedor continuam aumentando e o do domínio decresce.

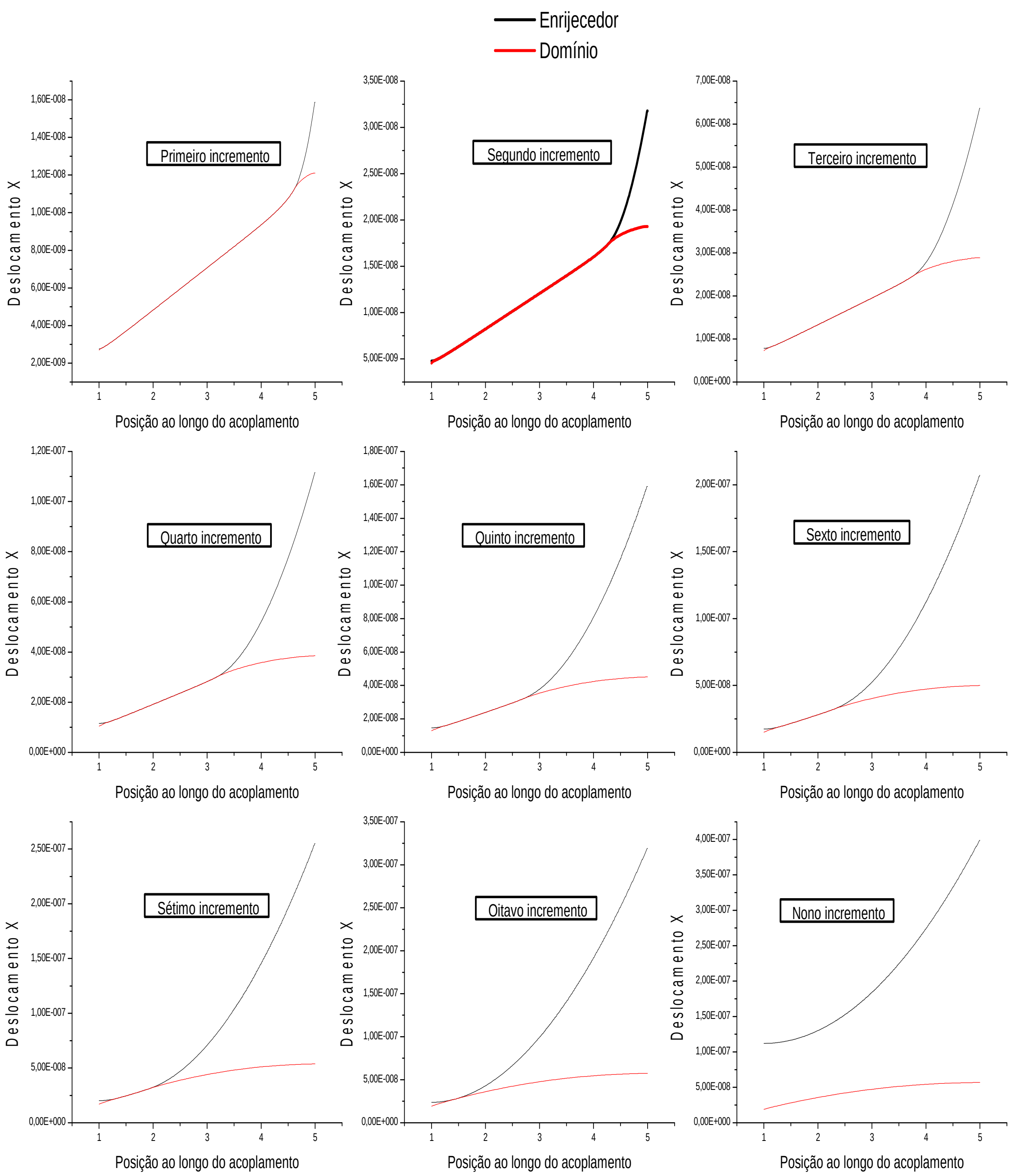

Figura 7 – Gráfico da evolução do desacoplamento dos deslocamentos do domínio e do enrijecedor.

Finalmente na Figura 8 são apresentadas as curvas dos deslocamentos relativos entre os dois materiais. Pela definição apresentada na Eq. (16) os deslocamentos do enrijecedor são obtidos subtraindo-se os resultados apresentados na Figura 6 ao da Figura 7

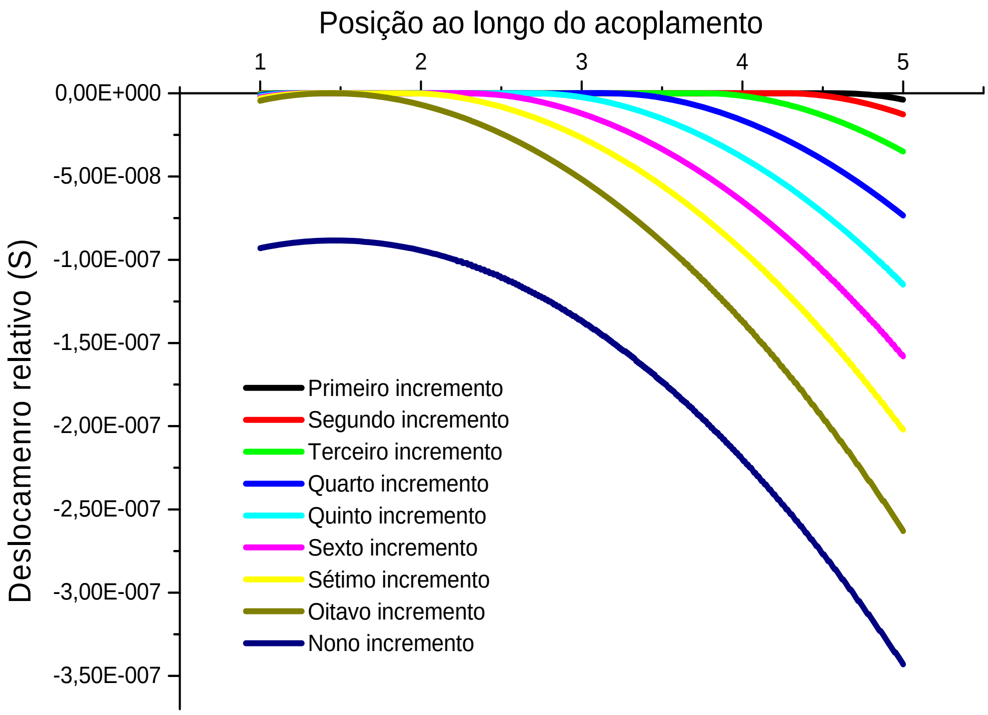

Figura 8 – Gráfico do deslocamento relativo entre o domínio e o enrijecedor.

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho o domínio foi modelado pelo MEC e o enrijecedor pelo MEF. Para o desenvolvimento dos elementos do MEF foi utilizado a cinemática para elementos de pórticos bidimensional semelhante a desenvolvida por (Pacolla, 2004). A aproximação utilizada para o elemento do MEF foram polinômios cúbicos para os deslocamentos e rotações, sendo estas aproximações independentes, e um polinômio linear para as forças. Devido essa diferença de aproximação entre deslocamentos e forcas, foram geradas, na formulação, mais equações que incógnitas tornando o sistema retangular e não resolvível. Para contornar este problema foi utilizado o Método dos Mínimos Quadrados, MMQ, para tornar as matrizes quadradas, e como conseqüência, uma melhor regularização das respostas.

O efeito da perda de aderência entre o domínio e enrijecedor foi considerado no presente trabalho. Esta consideração foi realizada através da inserção de um parâmetro adicional na equação de compatibilidade dos deslocamentos do domínio e do enrijeceddor. Este parâmetro adicional foi o deslocamento relativo S, o qual foi aproximado por polinômios lineares. Esta aproximação foi motivada devido às forças serem aproximadas por polinômios lineares, e como os modelos adotados relaciona estas forças com os deslocamentos S, foi uma forma cômoda de obter os parâmetros nodais coincidirem.

Para a validação da formulação de acoplamento considerando o efeito do escorregamento, foi apresentado em um exemplo. O exemplo constituía de uma barra submetida a uma carga axial simulando o arranque do enrijecedor ao domínio. Neste exemplo foram verificados valores coerentes de deslocamentos aos dois materiais, pois quando era atingida a força máxima do modelo de aderência ocorria a diferença de deslocamento entre o enrijecedor e o domínio, ocasionado pelo deslocamento relativo S. E ainda neste exemplo, foi verificado o perfeito acompanhamento das forcas de contato da direção da barra quando os seus valores excedem ao preconizado pelo modelo adotado.

6 AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pela bolsa concedida para o desenvolvimento deste trabalho.

7 REFERÊNCIAS

BOTTA, A. S. **Método dos Elementos de Contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. 2003. 185 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

BREBBIA, C. A. **The Boundary Element Method for Engineers**, London: Pentech Press, 1978. 189 p.

LEONEL, E. D. **Modelos não lineares do Método dos Elementos de Contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas a fadiga**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas – em andamento) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

PACCOLA, R. R. **Análise não Linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástica através da combinação entre o MEC e o MEF**. 2004. 190 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

PACCOLA, R. R. **Análise não Linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástica através da combinação entre o MEC e o MEF**. 2004. 190 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

ROCHA, F. C. **Análise de domínios reforçados através da combinação MEC/MEF considerando modelo de aderência**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

SÜLI, E.; MAYER, D. **An introduction to Numerical Analysis.** London: Cambridge University Press, 2007. 440 p.

WUTZOW, W. W.; VENTURINI, W. S. Análise de Sólidos Enrijecidos 2D Utilizando a Combinação MEC/MEF Regularizada. **Anais...** In: CILAMCE, 25., Recife, 2004.