

# RESPOSTA ELETROMECÂNICA DE COMPÓSITOS INTELIGENTES COM FIBRAS PIEZELÉTRICAS: UMA ABORDAGEM NUMÉRICA PARA DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES EFETIVOS UTILIZANDO O TEOREMA DAS MÉDIAS

Ricardo de Medeiros<sup>1</sup> & Volnei Tita<sup>2</sup>

## Resumo

*O presente trabalho visa empregar uma abordagem numérica para determinar as propriedades macro mecânica desses compósitos, combinando o conceito de Volume Elementar Representativo (VER) com o Método dos Elementos Finitos. Inicialmente, apresenta-se a fundamentação teórica associada à abordagem numérica empregada. Posteriormente, os modelos numéricos desenvolvidos são aplicados na determinação dos coeficientes efetivos de materiais compósitos inteligentes transversalmente isotrópicos com fibras piezelétricas de seção circular. Destaca-se ainda, que uma das contribuições do presente trabalho é a aplicação do Teorema das Médias para se obter de forma consistente os coeficientes efetivos. Finalmente, os resultados numéricos obtidos pela abordagem proposta são, então, comparados com resultados da literatura, verificando-se que os resultados obtidos são muito semelhantes aos resultados relatados pela literatura para arranjo quadrático e hexagonal com fibra de geometria circular. Portanto, a abordagem numérica proposta apresenta-se como uma boa alternativa para o cálculo de coeficientes efetivos de compósitos inteligentes.*

*Palavras-chave: Compósito inteligente. Fibras piezelétricas. Célula unitária. Teorema das médias.*

## ELECTROMECHANICAL RESPONSE OF PIEZOELECTRIC FIBER SMART COMPOSITES: NUMERICAL APPROACH FOR EVALUATION OF EFFECTIVE PROPERTIES USING THE MEAN THEOREM

### Abstract

*This work goals to apply a numerical approach for determining macroscopic properties of smart composite, using a Representative Element Volume (REV) and Finite Element Analysis. Firstly, it is showed the theoretical fundaments of numerical approach used. After that, numerical models are applied on the determination of effective coefficients for smart composites with circular piezoelectric fibers and transversal isotropy. One contribution of this work consists on the application of Mean Theorem to determine effective coefficients. Finally, the numerical results obtained are compared to literature results, and it is verified that there is a convergence between both results. Therefore, the numerical approach proposal is a good alternative to calculate effective coefficients of smart composites.*

*Keywords: Smart Composite. Piezoelectric fiber composite. Unit cell. Mean theorem.*

## 1 INTRODUÇÃO

Uma definição aceita para material ativo ou inteligente consiste em caracterizar o mesmo como um dispositivo de conversão de energia, por exemplo, transformar energia elétrica em mecânica

<sup>1</sup> Mestrando em Engenharia Mecânica - EESC-USP, medeiros@sc.usp.br

<sup>2</sup> Professor do Departamento de Engenharia Aeronáutica da EESC-USP, voltita@sc.usp.br

e vice-versa. Assim, tornou-se importante o estudo de problemas de acoplamento eletromecânico. Na indústria aeronáutica, o uso destes materiais inteligentes como sensores e/ou atuadores tem ocorrido em diversas áreas de outras indústrias, por exemplo: controle de ruído e de vibração; controle de posicionamento e sistemas de monitoramento da integridade estrutural (SHM – *Structural Health Monitoring*).

Dentre os materiais compósitos inteligentes, destacam-se aqueles com as fibras de materiais piezelétricos embebidas em uma matriz polimérica não condutora (PFC – *Piezoelectric Fiber Composite*). Pois, possuem grande potencial para aplicação em problemas de engenharia, que envolvem compósitos laminados estruturais, ou seja, os PFCs são mais eficientes para monitorar e controlar estruturas fabricadas em material compósito polimérico reforçado por fibra não ativa. Somado a isto, tem-se que os PFCs são capazes de atender requisitos críticos de projeto, necessários, sobretudo na indústria aeroespacial.

Em função do vasto campo de aplicação dos compósitos ativos, diversas abordagens foram estudadas ao longo do tempo para prever o acoplamento piezelétrico mecânico em materiais compósitos inteligentes. As abordagens são experimentais, analíticas, numéricas ou híbridas. Sendo que, normalmente os autores utilizam mais de um tipo de abordagem de modo a avaliar melhor os resultados obtidos, e principalmente, quantificar as propriedades associadas a um dado material compósito inteligente.

Em se tratando das abordagens analíticas, têm-se trabalhos como os de CHAN e UNSWORTH (1989), SMITH e AULD (1991) que apresentaram abordagens analíticas básicas, limitadas em determinadas condições de carregamentos. DUNN e TAYA (1993) acoplaram teorias micro mecânicas com a solução eletro elásticas para representar inclusões de formato elipsoidal em um meio piezelétrico infinito, visando determinar as propriedades eletromecânicas de piezocompósitos. Linhas de pesquisa similares são adotadas por BISEGNA e LUCIANO (1996, 1997) generalizaram os princípios de Hashin-Shtrikman para determinar os valores limites de todas as propriedades piezelétricas de materiais ativos. RODRÍGUEZ-RAMOS et al. (2001) e BRAVO-CASTILLERO et al. (2001) utilizaram a homogeneização assintótica em compósitos reforçados com fibras, possuindo simetria quadrada na distribuição e, em seguida consideraram os efeitos piezelétricos. GUINOVART-DÍAZ et al. (2001, 2002) aplicaram o modelo de homogeneização assintótica para considerar a resposta de compósitos onde a disposição das fibras apresenta simetria hexagonal.

Em se tratando da abordagem numérica, destacam-se os trabalhos que empregaram o Método dos Elementos Finitos (MEF). GAUDENZ (1997) estudou o emprego de uma célula unitária como modo de simular o comportamento de um “*patch*” de PFC para ser aplicado em placas metálicas. Aplicando as devidas condições de simetria, o pesquisador mostrou que é possível uma boa estimativa de comportamento do material através da simulação de apenas uma célula unitária submetida a diversos tipos de carregamentos. TAN e VU-QUOC (2005) apresentaram a formulação de um elemento *solid-shell* para aplicação em estruturas ativas de compósitos, contabilizando grandes deformações e grandes deslocamentos. O elemento possui graus de liberdade de deslocamento e elétricos, não apresentando graus de liberdade de rotação. Os autores asseguraram eficiência e precisão na análise de estruturas com grandes deformações de compósitos laminados estruturais, incluindo camadas piezelétricas. O trabalho de DENT et al. (2005) foi motivado pelos avanços na utilização de fibras PZT (piezelétricas) em aplicações como atuadores e sensores, incluindo controle estrutural através de compósitos inteligentes. Diversas fibras comercialmente disponíveis foram avaliadas e caracterizadas segundo sua morfologia, microestrutura e composição de fase. Como resultado do trabalho, foram identificadas fibras que possuem características inadequadas para o uso em compósitos piezelétricos. KAR-GUPTA e VENKATESH (2005, 2007) estudaram a influência da distribuição de fibras nos compósitos piezelétricos. Em seus estudos, consideraram tanto a fibra como a matriz, como possuindo propriedades piezelétricas. Apresentaram um estudo analítico onde não é possível considerar a distribuição das fibras, e, análises via MEF onde é possível considerar tal distribuição. BERGER et al. (2005, 2006), MORENO et al. (2009, 2010) e TRINDADE e BENJEDDOU

(2010) avaliaram as propriedades efetivas para arranjos quadrados e hexagonais de compósitos com fibras unidirecionais cilíndricas através de simulações numéricas.

Diversos autores utilizam mais de uma abordagem para efeitos de comparação, ou sugerem procedimentos utilizando mais de um tipo de análise para a total caracterização da estrutura/material em estudo. Apesar de a literatura contemplar uma série de trabalhos sobre a determinação das propriedades de compósitos ativos, tem-se que raramente há uma descrição detalhada sobre a formulação matemática envolvida e, principalmente, sobre a aplicação adequada das condições de contorno. Dessa forma, o presente trabalho visa empregar uma abordagem numérica para determinar as propriedades macro mecânica de compósitos inteligentes, combinando o conceito de Volume Elementar Representativo (VER) com o Método dos Elementos Finitos. Ao contrário da maioria dos trabalhos da literatura, há uma apresentação detalhada dos modelos em elementos finitos de uma célula unitária e da aplicação adequada de condições de contorno nestes modelos. Sendo assim, inicialmente, apresenta-se a fundamentação teórica associada à abordagem numérica empregada. Posteriormente, os modelos numéricos desenvolvidos são aplicados na determinação dos coeficientes efetivos de materiais compósitos inteligentes transversalmente isotrópicos com fibras piezelétricas de seção circular. Destaca-se ainda, que uma das contribuições do presente trabalho é a aplicação do Teorema das Médias para se obter de forma consistente os coeficientes efetivos do material compósito inteligente. Finalmente, os resultados numéricos obtidos pela abordagem proposta são, então, comparados com resultados da literatura.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No caso específico de fibras de materiais piezelétricos embebidas em uma matriz polimérica não condutora (PFC – *Piezoelectric Fiber Composite*), dentre as abordagens empregadas, têm-se o desenvolvimento de técnicas analíticas, que consistem em uma homogeneização das propriedades do material, bem como de técnicas experimentais, onde se procura fazer a caracterização dos materiais constituintes e do compósito final. Todavia, as técnicas utilizando análise numérica, sobretudo o Método dos Elementos Finitos têm sido muito exploradas. A análise via MEF divide-se em análises micro mecânicas e em análises macro mecânicas. Nas análises micro mecânicas, simula-se a fibra e a matriz como uma célula unitária com condições de contorno apropriadas para torná-la representativa para toda a camada constituída por PFC. Nas análises macro mecânicas, com suporte de ensaios experimentais do laminado final, utilizam-se propriedades médias nas regiões com a presença de compósitos inteligentes. Assim, um material heterogêneo é analisado como um material homogêneo anisotrópico.

### 2.1 Piezeletricidade

As respostas elástica e dielétrica estão acopladas em materiais piezelétricos. Consequentemente, as variáveis mecânicas de tensão e deformação estão relacionadas entre si, assim como as variáveis elétricas de campo elétrico e “deslocamento elétrico”. O acoplamento entre os campos elétrico e mecânico é descrito por coeficientes. Deve-se destacar que para o presente trabalho considera-se que materiais piezelétricos apresentam deformações muito pequenas e possuem resposta linear devido a mudanças no campo elétrico, deslocamento elétrico, ou nas tensões ou deformações mecânicas. Vale ressaltar que no caso específico das camadas ativas de um laminado, tem-se que a direção 3 está orientada com as fibras piezelétricas. Então, a resposta constitutiva em regime elástico é matematicamente escrita na forma de matriz como:

$$\begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{D\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [e] \\ [e]^t & -[\varepsilon] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{S\} \\ -\{E\} \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

onde  $\{T\}$  representa o tensor das tensões,  $\{S\}$  tensor das deformações,  $\{E\}$  potencial elétrico,  $\{D\}$  deslocamento elétrico,  $[C]$  tensor elástico de quarta ordem,  $[e]$  tensor de acoplamento eletromecânico de terceira ordem e  $[\varepsilon]$  tensor dielétrico de segunda ordem. O super índice  $t$  representa operação de transposição da matriz.

Para um sólido piezoelectrico transversalmente isotrópico, a matriz de rigidez, a piezoelectrica e a dielétrica possuem 11 coeficientes independentes, e aplicando condições de periodicidade piezoelectrica, consequentemente, a Eq. (1) pode ser escrita de forma expandida:

$$\begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{13} \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & -\varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & -\varepsilon_{11} & 0 \\ e_{13} & e_{13} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{23} \\ S_{31} \\ -E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

## 2.2 Formulação do problema

Segundo PÉREZ-FERNANDEZ et al. (2009) considera-se que o compósito em estudo seja periódico e que cada célula ocupe um domínio  $V$  de fronteira  $\partial V$  suave e de volume  $|V|$ , e somado a isto, que o mesmo seja formado pela repetibilidade de células unitárias. Então, este compósito heterogêneo é formado por  $N$  fases hipoteticamente acopladas de forma perfeita, ou seja, as magnitudes são consideradas contínuas através da superfície de contato entre as faces. Assim na formulação para o caso estático, com ausência de forças inerciais e livre de cargas, as relações constitutivas eletro-elásticas podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}(x; \sigma, E), & D_m &= D_m(x; \sigma, E), \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial G(x; \sigma, E)}{\partial \sigma_{ij}}, & D_m &= \frac{\partial G(x; \sigma, E)}{\partial E_m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Estas equações juntamente com as equações de equilíbrio eletro-elásticas conduzem a:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{m,m} = 0, \quad (4)$$

onde a vírgula denota diferenciação espacial.  $\sigma$  e  $D$  são chamadas auto equilibradas se satisfazem a Eq. (4).

Na Eq. (3) assume-se que existe um potencial diferenciável  $G(x; \sigma, E)$  associado a Eq. (3), sendo que  $G(x; \sigma, E)$  corresponde a uma função de densidade de energia. Dessa forma  $G(x; \sigma, E)$  é definido como uma Transformada de Legendre, consistindo em uma transformação matemática, que ao ser aplicada a uma função diferenciável em relação a suas variáveis independentes, fornece como resultado uma nova equação na qual as derivadas parciais associadas figuram como variáveis independentes, e, portanto, tem-se:

$$a(x; \sigma, E) = \chi_r(x) a_r(\sigma, E), \quad (5)$$

onde  $a_r$  são as restrições da fase  $a$  em relação as fases  $r = \overline{1, N}$  e  $\chi_r$  é sua função característica. Além disso,  $\varepsilon$  e  $E$  são ditas compatíveis se,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } ijk \text{ é uma permutação par de } \{1,2,3\}, \\ -1, & \text{se } ijk \text{ é uma permutação impar de } \{1,2,3\}, \\ 0, & \text{outro caso.} \end{cases} \quad (6)$$

Por conseguintes as equações de compatibilidade são dadas por:

$$\varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} \varepsilon_{klm} = 0, \quad \varepsilon_{ijk} E_{k,j} = 0. \quad (7)$$

A Eq. (7) expressa que  $\varepsilon$  e  $E$  são conservativos, ou seja, irrotacional, permitindo sua representação potencial ao garantir a existência de funções  $u$  e  $\varphi$ , tais que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad E_m = -\varphi_{,m}. \quad (8)$$

Dada a periodicidade do compósito descrito por PÉREZ-FERNANDEZ et al. (2009), assim todas as variáveis são 1-periódicas. Portanto, com esta consideração, a Eq. (4) dever ser entendida como um sistema de equações diferenciais parciais, ou seja,

$$\langle \sigma_{ij} \phi_{,j} \rangle = 0, \quad \langle D_m \phi_{,m} \rangle = 0, \quad (9)$$

sendo operador de média definido  $\langle F \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V F dV$ . As condições de contorno,

$$u_i|_{\partial V_u} = u_i^0, \quad \varphi|_{\partial V_\varphi} = \varphi^0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{\partial V_\sigma} = t_i^0, \quad D_m n_m|_{\partial V_D} = d^0, \quad (10)$$

onde  $n$  é o vetor unitário normal exterior a  $\partial V$ .

Para o caso de condições de contorno uniformes,

$$u_i^0 = \bar{\varepsilon}_{ij} x_j, \quad \varphi^0 = -\bar{E}_m x_m, \quad t_i^0 = \bar{\sigma}_{ij} n_j, \quad d^0 = \bar{D}_m n_m, \quad (11)$$

sendo que a barra indica uma valor constante.

### 2.3 Teorema das médias

A homogeneização de um compósito se refere a encontrar a dependência funcional entre as médias das variáveis do modelo que descreve o comportamento físico do mesmo. Anteriormente ao passo da homogeneização, busca-se conhecer as médias em termos das relações superficiais das variáveis, ou seja, as condições de contorno aplicadas ao compósito, independentemente das restrições constitutivas, segundo PÉREZ-FERNANDEZ et al. (2009). Seja  $\varepsilon$  e  $E$  compatíveis e tanto  $\sigma$  como  $D$  auto equilibradas,

(a) Para as condições de contorno gerais da Eq. (10) em  $\partial V$ ,

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2|V|} \int_{\partial V} (u_i^0 n_j + u_j^0 n_i) dS, \quad \langle E_m \rangle = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \varphi^0 n_m dS, \quad (12)$$

onde no caso de condições de contorno uniformes da Eq. (11) em  $\partial V$  tem-se:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \bar{\varepsilon}_{ij}, \quad \langle E_m \rangle = \bar{E}_m. \quad (13)$$

(b) Para as condições de contorno gerais da Eq. (10) em  $\partial V$ ,

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} t_i^0 x_j dS, \quad \langle D_m \rangle = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} d^0 x_m dS, \quad (14)$$

onde no caso de condições de contorno uniformes da Eq. (11) em  $\partial V$  tem-se:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \bar{\sigma}_{ij}, \quad \langle D_m \rangle = \bar{D}_m. \quad (15)$$

Segundo (PÉREZ-FERNANDEZ et al., 2009) considerando as magnitudes  $F$  e  $G$ , tais que,  $F_i$  e  $G_i \in L^2(V)$  com  $F_{i,j} = 0$  e que existe  $\gamma \in H^1(V)$ , tal que,  $G_i = \gamma_{,i}$ . Nota-se que  $G$  é irrotacional, ou seja,  $\epsilon_{ijk} G_{k,j} = 0$ . Logo, impondo as condições de contorno  $\gamma|_{\partial V} = \gamma^0$  e  $F_i n_i|_{\partial V} = \phi^0$  que, neste caso são uniformes, tem-se  $\phi^0 = \bar{F}_i n_i$  e  $\gamma^0 = \bar{G}_i x_i$ . Evidentemente pode-se identificar  $\sigma$  e  $D$  com  $F$ , bem como,  $\varepsilon$  e  $E$  com  $G$ . Também, considerando o Teorema da Divergência e, em particular para o delta de Kronecker, tem-se que  $\delta_{ij} = \langle \delta_{ij} \rangle = \langle x_{i,j} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} x_i n_j dS$ . Portanto,

(a) Seja  $G$  tal que  $G_i = \gamma_{,i}$  com  $\gamma|_{\partial V} = \gamma^0$  e  $\gamma^0 = \bar{G}_i x_i$  são uniformes, logo,

$$\langle G_i \rangle = \langle \gamma_{,i} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \gamma n_i dS = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \gamma^0 n_i dS = \bar{G}_i, \quad (16)$$

onde no caso de condições de contorno uniformes, tem-se:

$$\langle G_i \rangle = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \gamma^0 n_i dS = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \bar{G}_j x_j n_i dS = \bar{G}_i. \quad (17)$$

(b) Seja  $F$  tal que  $F_{j,i} = 0$  e com  $F_i n_i|_{\partial V} = \phi^0$  e  $\phi^0 = \bar{F}_i n_i$  são uniformes, logo,

$$\langle F_i \rangle = \langle F_j \delta_{ij} \rangle = \langle F_j x_{i,j} \rangle = \left\langle (F_j x_i)_{,j} - (F_{j,j} x_i) \right\rangle = \left\langle (F_j x_i)_{,j} \right\rangle = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} F_j n_j x_i dS, \quad (18)$$

onde no caso de condições de contorno uniformes da Eq. (11) em  $\partial V$  tem-se:

$$\langle F_i \rangle = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} F_j n_j x_i dS = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \phi^0 x_i dS = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \bar{F}_j n_j x_i dS = \bar{F}_i. \quad (19)$$

## 2.4 Coeficientes efetivos em compósitos inteligentes piezelétricos

As Eq. (13) e Eq. (15) são gerais no sentido de que são válidas independentemente da forma geométrica das interfaces que limitam as fases dos componentes do meio heterogêneo. Além disso, as propriedades efetivas de um material compósito inteligente podem ser denotadas pelo tensor constitutivo tomando como base a relação constitutiva dada por valores médios:

$$\begin{Bmatrix} \langle T \rangle \\ \langle D \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [e] \\ [e]^t & -[\varepsilon] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle S \rangle \\ -\langle E \rangle \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Supondo que o Volume Elementar Representativo (VER) esteja submetido a condições de contorno homogêneas dadas pela Eq. (10). Alternativamente, determinam-se as propriedades efetivas a partir das Eq. (13) e Eq. (15), e, então, tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} \langle S \rangle \\ \langle E \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C] & [e] \\ [e]^t & -[\varepsilon] \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \langle T \rangle \\ -\langle D \rangle \end{Bmatrix}. \quad (21)$$

Estas relações são obtidas supondo que o VER esteja submetido a condições homogêneas. Portanto, para obter as propriedades efetivas dos meios heterogêneos, se necessita efetuar o processo de média especificado pelas Eq. (13) e Eq. (15). Portanto, calcula-se as matrizes de rigidez, acoplamento e dielétrica usando as Eq. (20) ou Eq. (21) segundo cada caso. Este processo, aparentemente simples, para que seja rigorosamente operado, necessita de soluções exatas para os campos de tensão ( $T_{ij}(x_k)$ ), deformações ( $S_{ij}(x_k)$ ), campo elétrico ( $D_i(x_k)$ ) e deformações elétricas ( $E_i(x_k)$ ) nos meios heterogêneos, no qual somente é possível para uma classe muito restrita de problemas.

Com isso as propriedades efetivas do compósito ativo (dada pelo subscrito *eff*) podem ser definidas pelos campos médios da mesma forma que na Eq. (1), sendo que na forma compacta de matriz é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \langle \bar{T} \rangle \\ \langle \bar{D} \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [C]_{eff} & [e]_{eff} \\ [e]_{eff}^t & -[\varepsilon]_{eff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \langle \bar{S} \rangle \\ -\langle \bar{E} \rangle \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Assumindo que a média das propriedades mecânicas e elétricas de uma célula unitária é igual à média das propriedades de um compósito particular, como demonstrado anteriormente. As médias dos campos de tensão, deformação, campo elétrico e deslocamento elétrico no VER são definidas por:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij} &= \frac{1}{|V|} \int_V T_{ij}^0 dV, & \bar{S}_{ij} &= \frac{1}{|V|} \int_V S_{ij}^0 dV, \\ \bar{D}_i &= \frac{1}{|V|} \int_V D_i^0 dV, & \bar{E}_i &= \frac{1}{|V|} \int_V E_i^0 dV, \end{aligned} \quad (23)$$

onde  $V$  é o volume da célula unitária e a barra denota valores médios. Ao empregar o Método dos Elementos Finitos, a média dos valores pode ser calculada por:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij} &= \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{nel} T_{ij}^{(n)} V^{(n)}, & \bar{S}_{ij} &= \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{nel} S_{ij}^{(n)} V^{(n)}, \\ \bar{D}_i &= \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{nel} D_i^{(n)} V^{(n)}, & \bar{E}_i &= \frac{1}{V} \sum_{n=1}^{nel} E_i^{(n)} V^{(n)}, \end{aligned} \quad (24)$$

onde  $V$  é o volume de uma célula unitária,  $nel$  é o número de elementos modelados na célula unitária,  $V^{(n)}$  é o volume do  $n$ -ésimo elemento e, finalmente,  $T^{(n)}$ ,  $S^{(n)}$ ,  $D^{(n)}$  e  $E^{(n)}$  são os campos determinados para o  $n$ -ésimo elemento.

## 2.5 Volume Elementar Representativo (VER)

Como verificado anteriormente, uma das abordagens numéricas para a determinação das propriedades efetivas de PFCs consiste no emprego de um Volume Elementar Representativo modelado por elementos finitos. Este modelo computacional é utilizado para determinar um meio homogêneo equivalente ao compósito original. Sendo que diversos outros arranjos de fibras podem ser utilizados, conforme discutido por KAR-GUPTA e VENKATESH (2007). A Figura 1(a) ilustra uma célula unitária, que com a imposição de condições de simetria adequadas, pode representar o comportamento do compósito inteligente como um todo, assumindo-se que o mesmo tenha comprimento infinito (ou muito maior que o diâmetro da fibra) nas três direções de ortotropia.

Esta hipótese impõe, portanto, que o material tenha as mesmas propriedades nas duas direções perpendiculares ao comprimento da fibra, ou seja, que haja isotropia transversal. Utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, pode-se fazer a análise apenas da célula unitária, discretizada em quantidade apropriada de elementos. Assim, aplicando-se as propriedades de cada material individualmente, obtém-se as propriedades efetivas do compósito. Desta maneira, os parâmetros da matriz constitutiva são obtidos através de combinações de carregamentos e condições de contorno apropriadas, podendo-se estimar inclusive os valores dos termos de acoplamento elétrico-mecânico.

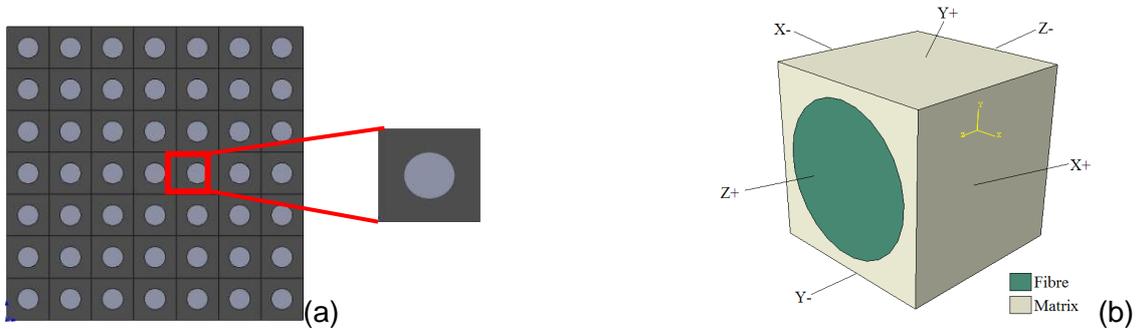


Figura 1 – (a) Volume Elementar Representativo (VER) utilizado neste trabalho para arranjo quadrático.

A Figura 1(b) apresenta a designação dada as superfícies do VER. De acordo com sua localização, as superfícies do VER são designadas como  $X+$ ,  $X-$ ,  $Y+$ ,  $Y-$ ,  $Z+$  e  $Z-$ . Vale lembrar que em todas as análises, para material piezolétrico, a fibra é considerada contínua e orientada ao longo do eixo-z (eixo 3).

Adotando-se a hipótese de que a célula unitária deforma de maneira repetida e idêntica aos seus vizinhos, em um VER, tem-se que as condições de periodicidade decorrem das exigências de compatibilidade com relação às bordas opostas. Considerando dois pontos opostos,  $A$  e  $B$ , e outro conjunto de pontos opostos,  $C$  e  $D$ , seus deslocamentos  $u_i$ , respeitando a periodicidade do VER, podem ser escritos em termos da tensão média da célula unitária ( $S_{ij}$ ), ou seja:

$$u_i^A = u_i^B + \bar{S}_{ij}(x_j^A - x_j^B), \quad (25)$$

$$u_i^C = u_i^D + \bar{S}_{ij}(x_j^C - x_j^D), \quad (26)$$

As mesmas relações também são válidas para os graus de liberdade elétricos. Subtraindo as duas equações e considerando que a média de  $S_{ij}$  é a mesma nas referidas equações, tem-se que  $(x^A - x^B)$  é igual  $(x^C - x^D)$ . Portanto, a equação com estas restrições pode ser reescrita respectivamente para os graus de liberdade de deslocamento e potencial elétrico da seguinte forma:

$$u_i^A - u_i^C = u_i^B - u_i^D, \quad (27)$$

$$\gamma^A - \gamma^C = \gamma^B - \gamma^D, \quad (28)$$

onde  $\varphi$  é o potencial elétrico correspondente ao nó indicado pelo índice sobrescrito.

As Eq. (27) e Eq. (28) representam uma condição de paralelismo entre os lados  $AC$  e  $BD$ . Esta condição deve ser aplicada para cada par de nós em lados opostos da célula unitária (em sentido vertical e horizontal) e deve ser repetida ao longo da profundidade da célula. Na análise apresentada, não é necessário especificar essas condições para todos os casos, porque em alguns casos, o deslocamento e as condições de contorno elétricas já asseguram essa restrição de paralelismo. É aconselhável evitar a aplicação dessa condição, porque há um grande número de equações que devem ser introduzidas. Dessa forma, procedimentos automáticos para localizar nós opostos e aplicar as restrições necessárias devem ser utilizados. No presente trabalho, optou-se pelo desenvolvimento de sub-rotinas em *Python* visando à automação desses procedimentos. Sendo que tais sub-rotinas foram empregadas, principalmente, nos casos envolvendo carregamentos de cisalhamento.

## 2.6 Modelos em Elementos Finitos do VER

No presente trabalho, a metodologia empregada para a determinação dos onze coeficientes efetivos de materiais compósitos inteligentes (mais especificamente de PFCs) está baseada numa abordagem numérica que consiste no emprego de modelos do VER solucionados via MEF.

### 2.6.1 Configurações do VER Modelos de Célula Unitária

Diferentes configurações de células unitárias devem ser utilizadas de acordo com as condições de carregamento. Devido ao elevado grau de simetria do arranjo quadrático, mostrado na Figura 2(a), o mesmo foi utilizado para todos os casos de carregamento. Entretanto, o modelo hexagonal, mostrado na Figura 2(b), foi empregado nos casos em que o deslocamento ou o potencial elétrico foi fixado diferente de zero em apenas uma superfície. Quando estão envolvidos carregamentos de cisalhamento, o VER deve ser estendido para obter a completa simetria entre os lados opostos das superfícies envolvidas (correspondência entre nós opostos), a fim de aplicar corretamente as restrições dadas pelas Eq. (27) e Eq. (28). Considerando o carregamento de cisalhamento no plano X-Y (plano 1-2), o modelo que foi utilizado, está demonstrado na Figura 2(c) e de cisalhamento no plano Y-Z (plano 2-3), o modelo que foi utilizado, está apresentado na Figura 2(d).

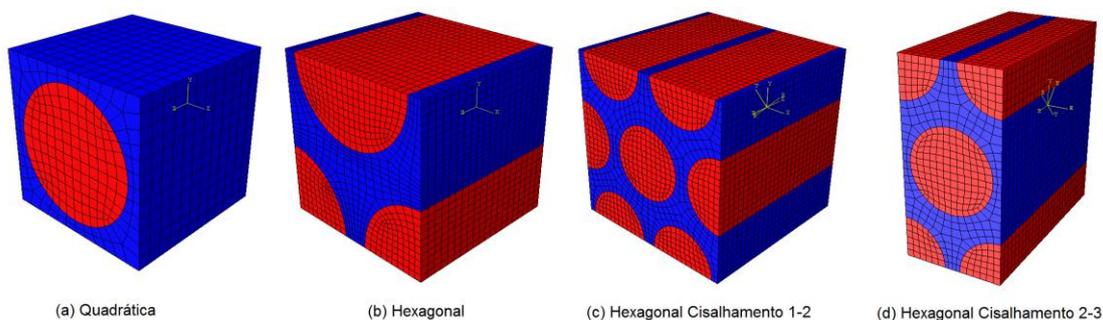


Figura 2 – (a)Volume Elementar Representativo (VER) utilizado neste trabalho para arranjo quadrático.

### 2.6.2 Propriedades dos materiais

As propriedades elástica, piezelétrica e dielétrica são dadas em  $\times 10^{10} Pa$ ,  $C/m^2$ ,  $nF/m$ , respectivamente. No presente trabalho, utilizou-se a fibra piezelétrica PZT-5A envolvida em uma

matriz não piezolétrica de resina epóxi (matriz polimérica). As propriedades da resina epóxi e do PZT-5A foram obtidas de BERGER et al. (2005) e são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades dos materiais: matriz (resina epóxi) e fibra (PZT-5A)

	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$C_{66}$	$e_{13}$	$e_{15}$	$e_{33}$	$\epsilon_{11}$	$\epsilon_{33}$
	$\times 10^{10}$ Pa						$C / m^2$			$\times 10^{-9}$ F / m	
Fibra	12,1	7,54	7,52	11,1	2,11	2,28	-5,4	12,3	15,8	8,11	7,35
Matriz	0,386	0,257	0,257	0,386	0,064	0,064	-	-	-	0,0797	0,0797

### 2.6.3 Aplicação das Condições de Contorno

Existe uma gama de combinações para determinação dos coeficientes efetivos. As condições de contorno prescritas simplificarão o conjunto de equações apresentado na Eq. (2) e, então, tornar-se-á possível determinar as propriedades do compósito inteligente. Como será constatado, tem-se que seis análises são necessárias para se obter os onze coeficientes efetivos. Vale ressaltar que os resultados mais confiáveis produzem uma dada simetria de resposta da célula analisada. Sendo que os resultados mais precisos são obtidos quando o carregamento é aplicado na direção da fibra. Portanto, a primeira análise envolve a determinação de coeficientes que podem ser obtidos através da aplicação de deslocamentos ou gradiente de potencial elétrico na direção Z (direção 3).

Para a determinação dos coeficientes  $C_{13}^{eff}$  e  $C_{33}^{eff}$ , os deslocamentos normais foram fixados zero nas superfícies  $X+$ ,  $X-$ ,  $Y+$ ,  $Y-$  e  $Z-$ . Então, aplicou-se um deslocamento positivo na direção de Z, ou seja, prescrito na superfície  $Z+$ . O potencial elétrico foi fixado em zero em todas as superfícies do modelo. Estas condições de contorno asseguram a compatibilidade da célula unitária. A condição de potencial elétrico prescrito como zero assegura que  $\{\bar{E}\} = \{0\}$  e as restrições de deslocamento nulo asseguram que  $\bar{S}_{11} = \bar{S}_{22} = \bar{S}_{12} = \bar{S}_{23} = \bar{S}_{31} = 0$ . Assim, apenas  $S_{33}$  é diferente de zero, portanto a primeira e a terceira linha da Eq. (2) são utilizadas para obter  $C_{13}^{eff}$  e  $C_{33}^{eff}$ .

$$C_{13}^{eff} = \bar{T}_{11} / \bar{S}_{33}, \quad (29)$$

$$C_{33}^{eff} = \bar{T}_{33} / \bar{S}_{33}. \quad (30)$$

Para a determinação dos coeficientes  $e_{13}^{eff}$ ,  $e_{33}^{eff}$  e  $\epsilon_{33}^{eff}$ , deslocamentos são fixados zero em todas as faces do modelo. O potencial elétrico é prescrito zero na superfície  $Z-$  e aplicado um valor arbitrário na superfície  $Z+$ . Estas condições de contorno asseguram a compatibilidade da célula unitária. Portanto, a condição prescrita de deslocamento zero em todas as superfícies assegura que  $\{\bar{S}\} = \{0\}$  e a aplicação da diferença potencial elétrico nas superfícies  $Z+$  e  $Z-$  assegura um gradiente apenas na direção Z. Consequentemente, da primeira, terceira e última linhas da Eq. (2), respectivamente os valores dos coeficientes  $e_{13}^{eff}$ ,  $e_{33}^{eff}$  e  $\epsilon_{33}^{eff}$  podem ser obtidos:

$$e_{13}^{eff} = \bar{T}_{11} / \bar{E}_3, \quad (31)$$

$$e_{33}^{eff} = -\bar{T}_{33} / \bar{E}_3, \quad (32)$$

$$\epsilon_{33}^{eff} = \bar{D}_3 / \bar{E}_3. \quad (33)$$

Para a determinação dos coeficientes  $C_{11}^{eff}$  e  $C_{12}^{eff}$ , deslocamentos normais às superfícies  $X-$ ,  $Y+$ ,  $Y-$ ,  $Z+$  e  $Z-$ , são fixados como zero alguns valores de tensão média ( $\bar{S}_{22} = \bar{S}_{12} = \bar{S}_{23} = \bar{S}_{31} = \bar{S}_{33} = 0$ ), então, deslocamentos positivos são prescritos na superfície  $X+$  na direção do eixo  $X$ . O potencial elétrico é fixado zero em todas as superfícies do modelo, assim  $\{\bar{E}\} = \{0\}$ . Portanto, da primeira e segunda linha da Eq. (2) obtém-se os seguintes coeficientes:

$$C_{11}^{eff} = \bar{T}_{11} / \bar{S}_{11}, \quad (34)$$

$$C_{12}^{eff} = \bar{T}_{22} / \bar{S}_{11}. \quad (35)$$

Para a determinação do coeficiente  $\varepsilon_{11}^{eff}$ , deslocamentos normais são fixados zero em todas as superfícies do modelo. O potencial elétrico é fixado zero na superfície  $X-$ , e, é prescrito um potencial elétrico na superfície  $X+$ . Esta condição assegura a compatibilidade da célula unitária. Os deslocamentos fixos iguais a zero asseguram que  $\{\bar{S}\} = \{0\}$  e a aplicação de potencial elétrico assegura apenas gradiente na direção  $X$ . Portanto, da sétima linha da Eq. (2) tem-se:

$$\varepsilon_{11}^{eff} = \bar{D}_1 / \bar{E}_1. \quad (36)$$

Para a determinação do coeficiente  $C_{66}^{eff}$ , deslocamentos normais na direção  $Z$  são fixados zero em todos os nós do modelo. Todos os nós de uma linha no centro, perpendicular ao plano  $X-Y$ , têm seus deslocamentos em  $X$  e  $Y$  fixados zero. Duas linhas opostas ao longo da borda da célula têm seu sistema de coordenadas modificado para coordenadas cilíndricas, e, têm também, seus deslocamentos angulares restringidos a fim de evitar a rotação e gerar movimento de corpo rígido. Estes nós estão no plano  $X-Y$  e fazem um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo de coordenadas. O potencial elétrico é prescrito zero em todas as superfícies do modelo. Forças de cisalhamento de mesmo módulo e orientações opostas são aplicadas nas superfícies  $Y+$  e  $Y-$  com a direção  $X$ , e, nas superfícies  $X+$  e  $X-$  com direção  $Y$ , produzindo um estado de cisalhamento puro no plano  $X-Y$ . Somado a estas condições, são aplicadas as condições de paralelismo, deduzidas das Eq. (27) e Eq. (28), entre os pares de nós das superfícies  $X+$  e  $X-$ , e entre as superfícies  $Y+$  e  $Y-$ . Estas condições do contorno garantem a compatibilidade da célula unitária. Assim, gerando um estado de cisalhamento puro no plano  $X-Y$ , somente a componente  $\bar{S}_{12}$  de  $\{\bar{S}\}$  é diferente de zero. As condições de potencial elétrico são fixadas em zero em todas as superfícies e produzem  $\{\bar{E}\} = \{0\}$ . Portanto, da quarta linha da Eq. (2) tem-se:

$$C_{66}^{eff} = \bar{T}_{12} / \bar{S}_{12}. \quad (37)$$

Para a determinação dos coeficientes  $e_{15}^{eff}$  e  $C_{44}^{eff}$ , deslocamentos normais na direção  $X$  são fixados zero em todos os nós da célula unitária. Todos os nós de uma linha no centro da célula perpendicular ao plano  $Y-Z$  têm seus nós restringidos, quando os deslocamentos normais nas direções  $Y$  e  $Z$  são fixos em zero. Duas linhas opostas ao longo das bordas da célula nas superfícies  $Z+$  e  $Z-$  são restringidas na direção  $Y$  para garantir que não haverá rotações e o modelo não produza movimento de corpo rígido. Forças de cisalhamento são aplicadas nas superfícies  $Y+$  e  $Y-$  com direção  $Z$ , com mesmo módulo, contudo com orientações opostas, e nas superfícies  $Z+$  e  $Z-$  com direção  $Y$ , produzindo um estado de cisalhamento puro  $Y-Z$ . Também, as condições de paralelismo deduzidas da Eq. (27) e Eq. (28), devem ser aplicadas entre o par de superfícies  $Z+$  e  $Z-$ , e entre as superfícies  $Y+$  e  $Y-$ . Estas condições de contorno asseguram a compatibilidade da célula unitária. O coeficiente efetivo  $\varepsilon_{11}^{eff}$  foi obtido da Eq. (36). Consequentemente, os valores dos coeficientes  $e_{15}^{eff}$  e  $C_{44}^{eff}$  podem ser obtidos da quinta e oitava linha da Eq. (2), assim:

$$e_{15}^{eff} = (-\bar{E}_2 \cdot \varepsilon_{11}^{eff} + \bar{D}_2) / \bar{S}_{23}, \quad (38)$$

$$C_{44}^{eff} = (\bar{T}_{23} + \bar{E}_2 \cdot e_{15}^{eff}) / \bar{S}_{23}. \quad (39)$$

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

De acordo com a metodologia empregada, alguns resultados das análises via MEF são apresentados na Figura 3. Os resultados dessas análises são utilizados para a determinação das propriedades envolvidas no cálculo dos coeficientes efetivos, considerando arranjos quadráticos e fibras de seção circular. A Figura 3(a) mostra o resultado da primeira análise para a tensão  $T_{11}$ , a Figura 3(b) evidencia o resultado da quarta análise para a variável  $E_I$ , e, a Figura 3(c) apresenta o resultado da quarta análise para a variável  $D_I$ .

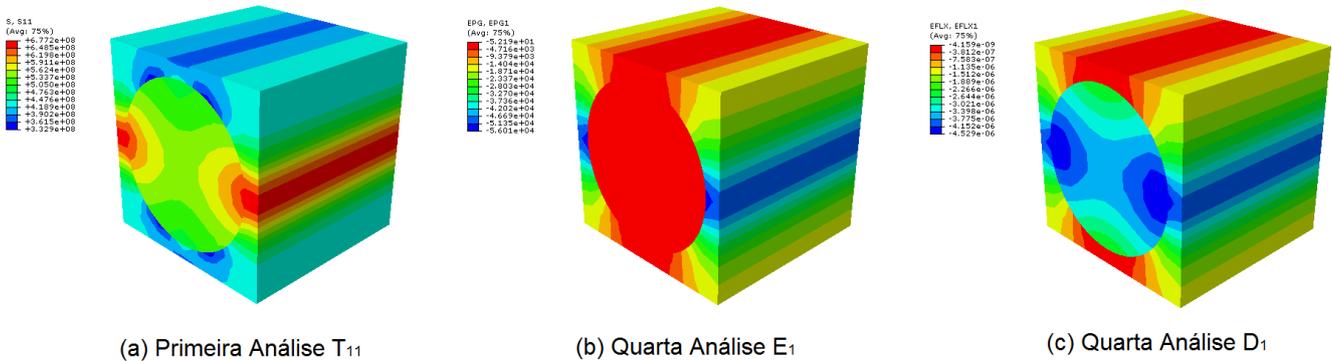


Figura 3 – (a)Volume Elementar Representativo (VER) utilizado neste trabalho para arranjo quadrático.

Como comentado anteriormente, todos os 11 coeficientes efetivos podem ser calculados com o auxílio do MEF para uma fração volumétrica de fibra desejada. Da Eq. (2) e com base nos resultados via MEF da célula unitária (VER), calculou-se a média dos valores de cada variável. Após isto, então, com o auxílio da Eq. (29) até a Eq.(39), podem-se obter os coeficientes efetivos. As colunas (3) e (4) resumam os coeficientes obtidos pelo presente trabalho. Sendo que a coluna (3) refere-se ao arranjo quadrático e a coluna (4) ao arranjo hexagonal para fibras de geometria circular. Além disso, os resultados obtidos neste trabalho foram comparados com resultados analíticos e numéricos apresentados pela literatura. Assim, a coluna designada como (1), refere-se ao resultado obtido por BERGER et al. (2005), estimado dos gráficos presentes neste artigo. A coluna designada por (2), refere-se a resultados numéricos obtidos por MORENO et al. (2009).

A diferença percentual absoluta entre os resultados ( $\Delta$ ) é apresentada nas três últimas colunas da Tabela 2.  $\Delta_1$  é calculado com base nos resultados analíticos e numéricos apresentados por BERGER et al. (2005) e MORENO et al. (2009), respectivamente.  $\Delta_2$  é calculado com base nos resultados analíticos e o presente trabalho para arranjo quadrático de célula unitária, respectivamente.  $\Delta_3$  é a diferença entre o resultado analítico e o presente trabalho para arranjo hexagonal da célula unitária, respectivamente. Vale ressaltar que no trabalho publicado por BERGER et al. (2005) há também resultados numéricos utilizando células unitárias modeladas via MEF e o Teorema das Médias. Todavia, os resultados foram obtidos através do programa ANSYS com auxílio de sub-rotinas Fortran para a aplicação automática das condições de contorno, ao passo que no presente trabalho, os resultados foram obtidos através do programa Abaqus com auxílio de sub-rotinas Python para a aplicação automática das condições de contorno. Além disso, o tipo de elemento utilizado por

BERGER et al. (2005) foi um elemento com integração linear, ao passo que no presente trabalho, utilizou-se um elemento com integração quadrática, o que permitiu determinar resultados mais precisos. Por fim, algumas condições de contorno empregadas por BERGER et al. (2005), não foram aplicadas a fim de evitar problemas de excesso de restrições (over-constraints).

Tabela 2 – Comparação dos resultados: analítico x numérico

Coef.	Unidade	(1)	(2)	(3)	(4)	$\Delta_1$ [%]	$\Delta_2$ [%]	$\Delta_3$ [%]
$C_{11}^{eff}$	$\times 10^{10}$ Pa	0,950	1,088	1,086	1,036	14,526	14,316	9,053
$C_{12}^{eff}$		0,560	0,465	0,467	0,495	16,964	16,607	11,607
$C_{13}^{eff}$		0,600	0,604	0,604	0,624	0,667	0,667	4,00
$C_{33}^{eff}$		3,500	3,525	3,513	3,692	0,714	0,371	5,486
$C_{44}^{eff}$		0,220	0,215	0,197	0,191	2,273	10,455	13,182
$C_{66}^{eff}$		0,200	0,154	0,154	0,184	23,00	23,00	8,00
$e_{13}^{eff}$	C / m <sup>2</sup>	-0,260	-0,258	-0,258	-0,263	0,769	0,769	1,154
$e_{15}^{eff}$		0,020	0,024	0,019	0,020	20,00	5,00	0,00
$e_{33}^{eff}$		11,00	10,864	10,864	11,011	1,236	1,236	0,10
$\varepsilon_{11}^{eff}$	$\times 10^{-9}$ F/m	0,280	0,284	0,287	0,301	1,429	2,500	7,50
$\varepsilon_{33}^{eff}$		4,200	4,270	4,270	4,322	1,667	1,667	2,905

$\Delta_1 = |(1)-(2)|(1)$ : Berger et al. (2005) x Moreno et al. (2009 e 2010)

$\Delta_2 = |(1)-(3)|(1)$ : Berger et al. (2005) x Presente trabalho para célula quadrática

$\Delta_3 = |(1)-(4)|(1)$ : Berger et al. (2005) x Presente trabalho para célula hexagonal

Tabela 3 – Resultados com base nas Relações Universais (BENVENISTE; DVORAK, 1992)

$\frac{(C_{11}^{eff} + C_{12}^{eff}) - c^f k^f - c^m k^m}{2}$	$\frac{C_{13}^{eff} - c^f l^f - c^m l^m}{C_{33}^{eff} - c^f n^f - c^m n^m}$	$\frac{e_{31}^{eff} - c^f j^f - c^m j^m}{e_{33}^{eff} - c^f g^f - c^m g^m}$	$\frac{k^f - k^m}{l^f - l^m}$
1,30766	1,30671	1,30740	1,30772
$\frac{e_{31}^{eff} - c^f j^f - c^m j^m}{C_{13}^{eff} - c^f l^f - c^m l^m}$	$\frac{e_{33}^{eff} - c^f g^f - c^m g^m}{C_{33}^{eff} - c^f n^f - c^m n^m}$	$\frac{c^f q^f + c^m q^m - \varepsilon_{33}^{eff}}{e_{33}^{eff} - c^f g^f - c^m g^m}$	$\frac{j^f - j^m}{l^f - l^m}$
-7,43492E-11	-7,43100E-11	-7,41210E-11	-7,43494E-11
onde: $C_{11}^{eff} = k + C_{66}^{eff}$ , $C_{13}^{eff} = l$ , $C_{33}^{eff} = n$ , $e_{13}^{eff} = j$ , $e_{33}^{eff} = g$ , $e_{15}^{eff} = h$ , $\varepsilon_{11}^{eff} = t$ , $\varepsilon_{33}^{eff} = q$ , $c$ = fração volumétrica, subscrito "eff" representa os coeficientes homogeneizados, subscrito "f" representa os coeficientes da fibra, subscrito "m" representa os coeficientes da matriz.			

Como demonstrado na Tab. 2 os coeficientes que tem a maior diferença entre os procedimentos analíticos e os resultados obtidos neste trabalho foram  $C_{11}^{eff}$ ,  $C_{12}^{eff}$ ,  $C_{66}^{eff}$  e  $e_{15}^{eff}$ . Estes coeficientes são influenciados principalmente pelo comportamento no plano do composto. Estes valores diferem dos coeficientes de células hexagonais, devido à carga na célula quadrática foi aplicada em toda a resina epóxi, enquanto na célula hexagonal, o carregamento foi aplicado sobre a resina epóxi e na fibra, e por fim, assumiu-se isotropia transversal que não é exatamente cumprida nas direções para arranjos quadráticos. Em um arranjo hexagonal de fibra, a

isotropia transversal é realmente cumprida, resultando em valores aproximados dos valores encontrados analiticamente. Os outros coeficientes calculados pela metodologia numérica, quadrados e célula unitária hexagonal, mostrou uma boa concordância com os coeficientes obtidos pelo método de homogeneização assintótica (resultados analíticos).

Após a aplicação da metodologia, pode-se verificar que os coeficientes efetivos satisfazem as Relações Universais propostas por BENVENISTE e DVORAK (1992), sendo que estas relações correspondem a cristais tetragonais da classe 4mm e, considerando compósitos piezelétrico transversalmente isotrópico. Assim, a Tab. 3 apresenta valores calculados com base nessas Relações Universais, sendo que a máxima diferença relativa encontrada entre os valores é de 0,3%, evidenciando, assim, a potencialidade da abordagem numérica proposta.

## 4 CONCLUSÃO

Inicialmente, apresentou-se a fundamentação teórica de uma abordagem numérica via modelos de elementos finitos de célula unitária (VER), que foi empregada para prever as propriedades efetivas de materiais compósitos inteligentes, mais especificamente, PFCs. Conclui-se assim, que a referida abordagem, trata-se de uma aplicação prática do Teorema das Médias. Sendo que a mesma foi empregada para dois tipos de arranjo de célula: quadrático e hexagonal. Aplicando de forma adequada às condições de contorno aos modelos solucionados via MEF, pôde-se obter os resultados médios das respectivas análises. Com base nesses resultados numéricos médios, calculou-se os coeficientes efetivos para fibra piezelétrica (PZT5A) com geometria circular envolvida em uma matriz não piezelétrica (epóxi) para uma dada fração volumétrica. Portanto, a metodologia apresentada é uma alternativa para se determinar coeficientes efetivos de materiais compósitos inteligentes. As sub-rotinas em Python, que foram desenvolvidas para automatizar o processo de inserção das condições de contorno, evitam um trabalho demasiadamente grande, bem como, possíveis erros humanos neste tipo de tarefa.

Ademais, a metodologia foi avaliada ao se comparar os resultados obtidos da mesma com resultados presentes na literatura. Em geral, verificou-se que os resultados numéricos apresentados neste trabalho são muito semelhantes aos resultados relatados por Berger et al. (2005) e Moreno et al. (2009 e 2010) para arranjo quadrático e hexagonal com fibra de geometria circular. Portanto, a abordagem numérica proposta para determinar os coeficientes efetivos para PFCs é relativamente eficiente. Todavia, os resultados podem ser ainda melhorados em função de um estudo mais aprofundado da imposição das condições de contorno.

## 5 AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o CNPq (Processo n°. 135652/2009-0) e a FAPESP (Processo n°. 09/0544-5) pelo financiamento do presente trabalho de pesquisa. Além disso, os autores agradecem, também, a FAPEMIG pelo financiamento parcial através do INCT-EIE. Por fim, os autores também gostariam de agradecer ao Prof. Reginaldo Teixeira Coelho (EESC-USP) pela utilização da licença do programa Abaqus®, e principalmente, ao Prof. Julián Bravo-Castillero da Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana pelas discussões técnicas tão relevantes.

## 6 REFERÊNCIAS

BENVENISTE, Y. and DVORAK, G. J. **Uniform fields and universal relations in piezoelectric composites**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 40, n. 6, pp. 1295-1312, 1992.

BERGER, H. KARI, S., GABBERT, U., RODRIGUEZ-RAMOS, R., GUINOVART, R., OTERO, J. A. and BRAVO-CASTILLERO, J. **An analytical and numerical approach for calculating effective material coefficients of piezoelectric fiber composites.** International Journal of Solids and Structures, vol. 42, pp. 5692-5714, Oct., 2005.

BERGER, H. KARI, S., GABBERT, U., RODRIGUEZ-RAMOS, R., BRAVO-CASTILLERO, J., GUINOVART-DÍAZ, R., SABINA, F. J. and MAUGIN, G. A. **Unit cell models of piezoelectric fiber composites for numerical and analytical calculation of effective properties.** Smart Materials and Structures, vol. 15, pp. 451-458, Apr., 2006.

BISEGNA, P. and LUCIANO, R. **Variational bounds for the overall properties of piezoelectric composites.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 44, pp. 583-602, 1996.

BISEGNA, P. and LUCIANO, R. **On methods for bounding the overall properties of periodic piezoelectric fibrous composites.** Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 45, pp. 1329-1356, 1997.

BRAVO-CASTILLERO, J. GUINOVART-DÍAZ, R., SABINA, F.J. and RODRÍGUEZ-RAMOS, R. **Closed form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents – II. Piezoelectric and square symmetry.** Mechanics of Materials, vol.33, pp.237-248, Apr., 2001.

CHAN, H. L. W. and UNSWORTH, J. **Simple model for piezoelectric ceramic/polymer 1-3 composites used in ultrasonic transducer applications.** IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. vol.36, n. 4, pp.434-441, Jul., 1989.

DENT, A. C., NELSON, L. J., BOWEN, C. R., STEVENS, R., CAIN, M. and STEWART, M. **Characterization and properties os fine scale PZT fibres.** Journal of the European Ceramic Society, vol. 25, pp. 2387-2391, 2005.

DUNN, M. L. and TAYA, M. **Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites.** International Journal of Solids and Structures. vol.30, n. 2, pp.161-175, 1993.

GAUDENZI, P. **On the electromechanical response of active composite materials with piezoelectric inclusions.** Computers & Structures. vol.65, n. 2, pp.157-168, Oct., 1997.

KAR-GUPTA, R. and VENKATESH, T. A. **Electromechanical response of 1-3 piezoelectric composites: effect of poling characteristics.** Journal of Applied Physics, vol.98, n. 5, 14p, Sep., 2005.

KAR-GUPTA, R. and VENKATESH, T. A. **Electromechanical response of 1-3 piezoelectric composites: A numerical model to assess the effects of fiber distribution.** Acta Materialia. vol.55, n. 4, pp.1275-1292, Feb., 2007.

GUINOVART-DÍAZ, R., BRAVO-CASTILLERO, J., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., SABINA, F.J. and MARTÍNEZ-ROSADO, R., **Overall properties of piezocomposite materials 1-3.** Materials Letters, vol. 48, pp. 93-98, 2001.

GUINOVART-DÍAZ, R., BRAVO-CASTILLERO, J., RODRÍGUEZ-RAMOS, R., MARTÍNEZ-ROSADO, R., SERRANÍA, F. and NAVARRETE, M., **Modeling of elastic transversely isotropic composite using the asymptotic homogenization method. Some comparisons with other models.** Materials Letters, vol. 56, pp. 889-894, 2002.

MORENO, M. E., TITA, V. and MARQUES, F. D. Finite element analysis applied to evaluation of effective material coefficients for piezoelectric fiber composites. In: BRAZILIAN SYMPOSIUM ON AEROSPACE ENG. & APPLICATIONS, 2009, São José dos Campos, Brazil. **Anais...** 2009.

MORENO, M. E., TITA, V. and MARQUES, F. D. Influence of boundary conditions on the determination of effective material properties for active fiber composites. In: PAN-AMERICAN CONGRESS OF APPLIED MECHANICS, 2010, Foz do Iguaçu, Brazil. **Anais...** 2010.

PÉREZ-FERNANDEZ, L. D. **Un enfoque integrador de métodos asintóticos y variacionales para la evaluación del comportamiento efectivo de materiales compuestos magneto-electro-elásticos no lineales provistos de una estructura periódica.** 2009. 120p. Tesis (Doctor en Ciencias Matemáticas) – Instituto de Cibernética, Matemática y Física, Departamento de Física Aplicada, La Habana, Cuba, 2009.

RODRÍGUEZ-RAMOS, R., SABINA, F. J., GUINOVART-DÍAZ, R. and BRAVO-CASTILLERO. **Closed form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents – I. Elastic and square symmetry.** Mechanics of Materials. vol. 33, n. 4, pp. 223-235, Apr., 2001.

SMITH, W. A. and AULD, B. A. **Modeling 1-3 composite-piezoelectrics: thickness-mode oscillations,** IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control. vol. 38, n 1, pp. 40-47, Jan., 1991.

TAN, X. G. and VU-QUOC, L. **Optimal solid shell element for large deformable composite structures with piezoelectric layers and active vibration control.** International Journal for Numerical Methods in Engineering. vol.64, n 15, pp.1981-2013, Oct., 2005.

TRINDADE, M. A. and BENJEDDOU A., Modelling and Characterization of Shear Actuated Piezoelectric Fibre Composites. In: TENTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL STRUCTURES TECHNOLOGY, 2010, Stirlingshire, Scotland. **Anais...** 2010.