

TRECHOS RÍGIDOS EM ESTRUTURAS RETICULADAS – ANÁLISES LINEAR E NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA

Márcio Roberto Silva Corrêa¹ & Wilson Sergio Venturini²

Resumo

O presente artigo apresenta uma formulação simples para o tratamento de trechos rígidos de barras com o uso do processo dos deslocamentos em análise linear geométrica, a partir de desenvolvimento baseado na energia de deformação. A presente formulação permite a fácil adaptação de trechos rígidos em análises geometricamente não-lineares. Uma estratégia simplificada, admitindo-se o tratamento incremental, é apresentada, considerando-se pequenas rotações em cada incremento, adequada para o tratamento de casos tridimensionais em que as rotações não são comutativas.

Palavras-chave: Processo dos deslocamentos. Trechos rígidos. Não-linearidade geométrica.

RIGID LINKS IN FRAMED STRUCTURES – GEOMETRIC LINEAR AND NON-LINEAR ANALYSES

Abstract

This paper presents a simple formulation for the simulation of rigid lengths of bars using the strain energy based stiffness method, and considering the geometric linear analysis. This formulation allows easy adaptation to the geometric non-linear problem of rigid links. A simplified strategy, assuming the incremental approach is presented, considering small rotations in each increment, suitable for handling cases where the three dimensional rotations are non-commutative.

Keywords: Stiffness method. Rigid links. geometric non-linearity.

1 INTRODUÇÃO

Nos sistemas estruturais de edifícios é comum a presença de elementos de rigidez significativamente maior que a dos demais, possibilitando a sua idealização como infinitamente rígidos, sem perda apreciável da representatividade do modelo.

Uma situação típica é a análise do efeito de ações horizontais sobre a estrutura de um edifício cujo sistema estrutural é composto por lajes e pórticos, como se representa na figura 1a. Excetuando-se os casos em que a laje apresenta aberturas de grandes dimensões ou aqueles em que o pavimento tem, em planta, uma das dimensões de ordem de grandeza superior à outra, é razoável admitir-se que o pavimento funcione com um elemento infinitamente rígido no seu plano e perfeitamente flexível na direção normal a esse plano. Ou seja, o pavimento atua com um diafragma rígido que distribui as ações horizontais entre os vários painéis de contraventamento.

A simplificação do modelo é óbvia, uma vez que o comportamento do pavimento como uma chapa fica resumido à compatibilização dos deslocamentos no seu plano, na ausência de qualquer deformação. Sob o ponto de vista da resolução numérica há expressiva redução do número de graus de liberdade envolvidos na análise, pois a hipótese adotada dispensa a discretização da laje e permite

¹ Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, mcorrea@sc.usp.br

² Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, *in memoriam*

“escravizar” três graus de liberdade (duas translações no plano do diafragma e uma rotação normal) de todos os nós ao nível do pavimento aos correspondentes de um único nó denominado “mestre”.

Outra situação a ser destacada é a de nós de dimensões finitas que constituem as ligações entre pilares e vigas na formação de estruturas aporticadas resistentes a ações laterais (figura 1b). Em estruturas metálicas, no caso de vinculações resistentes ao momento fletor, bem como em edifícios de concreto, esses nós costumam ter dimensões não desprezíveis quando comparadas a vãos e pés-direitos usuais. Se o modelo não considera essas dimensões, erros significativos podem aparecer na análise do comportamento estrutural (WEAVER, 1967).

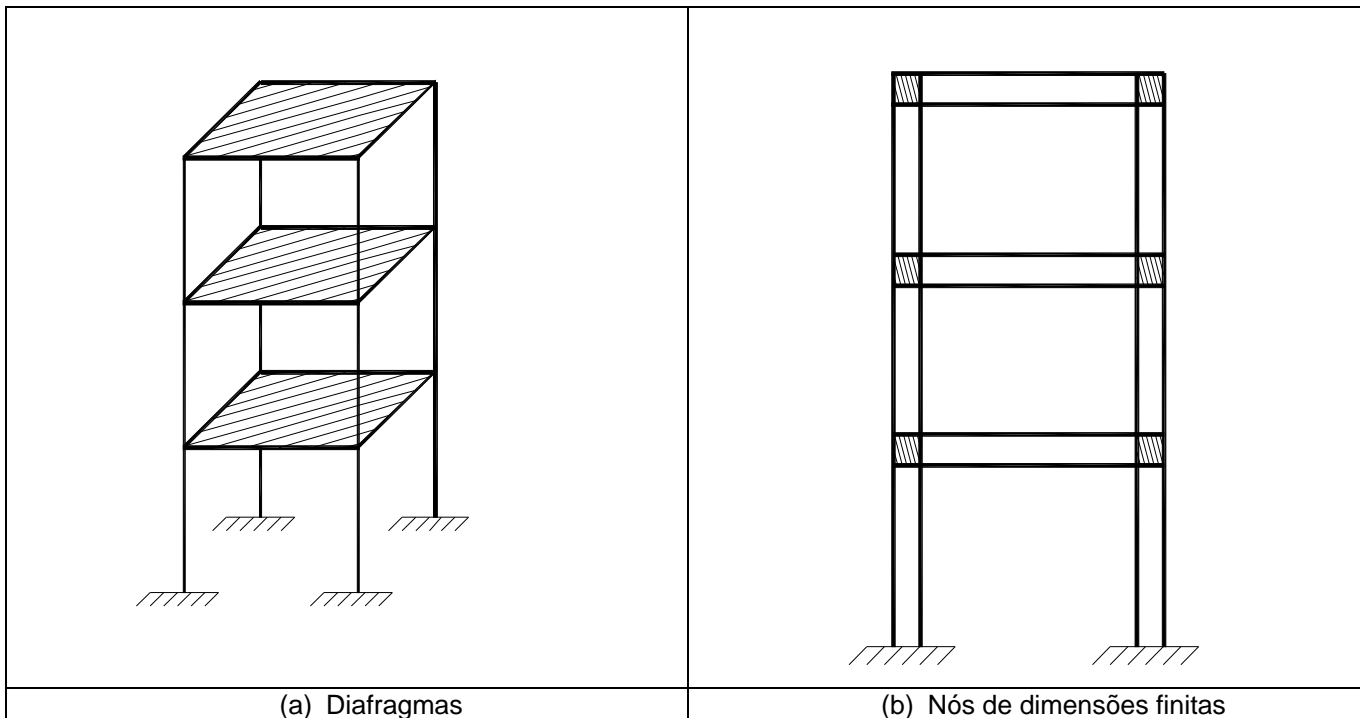


Figura 1 – Trechos rígidos em edifícios usuais.

Idealização eficiente e relativamente simples para os nós de dimensões finitas consiste em considerá-los como elementos infinitamente rígidos. Isto equivale a admitir um ponto que resume o nó ao qual se ligam os elementos estruturais deformáveis por meio de trechos rígidos. Esse recurso, presente em alguns *softwares*, costuma ser chamado de *offset*, verbo que em Inglês significa *compensar*, já que a introdução de condições de compatibilidade nos trechos rígidos permite compensar os deslocamentos a partir de translações e rotações do nó adotado como resumo do trecho rígido. De maneira análoga ao dos diafragmas rígidos, é possível reduzir o número de graus de liberdade envolvidos na análise numérica do comportamento da estrutura.

Nas seções seguintes será apresentada uma formulação, via Processo dos Deslocamentos, para a incorporação de trechos rígidos ao modelo. O desenvolvimento será feito como uma aplicação direta do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).

2 TRECHOS RÍGIDOS NA ANÁLISE LINEAR GEOMÉTRICA

Sejam dois sistemas de forças F_a e F_b , estaticamente equivalentes e dois conjuntos de deslocamentos Q_a e Q_b de pontos de um corpo em equilíbrio, associados a esses sistemas. É dado um deslocamento virtual arbitrário de corpo rígido de modo que ocorram deslocamentos Q_a e Q_b nas direções das forças F_a e F_b , respectivamente. Com aplicação do PTV, tem-se que o trabalho realizado pelos dois sistemas de forças é o mesmo. Assim

$$F_b^T Q_b = F_a^T Q_a \quad (1)$$

Supõe-se que os dois sistemas estejam relacionados pela transformação linear

$$F_a = \Lambda F_b \quad (2)$$

Considerando-se as equações (1) e (2) tem-se

$$F_b^T Q_b = (\Lambda F_b)^T Q_a \quad \text{ou} \quad F_b^T Q_b = F_b^T \Lambda^T Q_a \quad (3)$$

Como F_a e F_b são arbitrários Q_a e Q_b se relacionam pela transformação linear expressa por

$$Q_b = \Lambda^T Q_a \quad (4)$$

As equações (2) e (4) em conjunto ressaltam a correlação entre as variáveis estáticas e cinemáticas e constituem um aspecto particular da lei de contragradência para transformações de força e deslocamento.

Observa-se que não é necessário existir a inversa da transformação apresentada na equação (2). A matriz Λ pode ser singular ou até mesmo retangular sem invalidar o desenvolvimento anterior.

O sistema de forças pode ser entendido aqui de forma ampla, de modo a incluir componentes de força e momento. Correspondentemente, os deslocamentos associados podem ser translações ou rotações.

Considere-se como exemplo de aplicação o problema de trechos rígidos de barras, correspondente aos nós de dimensões finitas. A figura 2 apresenta uma barra disposta entre os nós I e J, cujo trecho deformável tem como extremos os pontos l_b e J_b . Os trechos Il_b e JJ_b são rígidos.

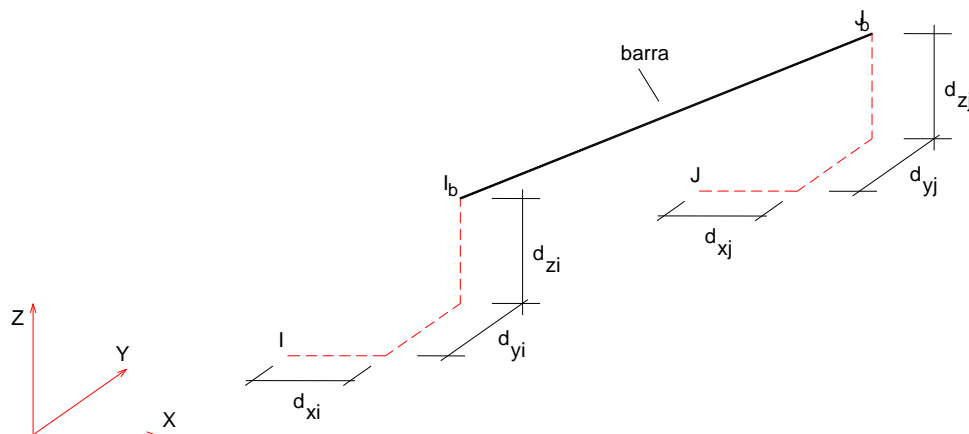


Figura 2 – Trechos rígidos nas extremidades de barra.

Em uma formulação que não incorpore trechos rígidos, os nós são os pontos l_b e J_b , extremos do trecho flexível, onde as coordenadas estão definidas. A adaptação a ser feita para a consideração de trechos rígidos consiste em promover a translação de coordenadas para os pontos I e J, que passam a ser os nós. Importa observar-se que, no caso de determinação de esforços e tensões na barra, só há interesse prático em seções pertencentes ao trecho deformável.

Toda a adaptação se faz reunindo-se as transformações necessárias relativas às duas extremidades da barra. As translações das componentes do vetor de forças e do vetor de deslocamentos do elemento se escrevem

$$F_a = \Lambda F_b \quad \text{e} \quad Q_b = \Lambda^T Q_a \quad \text{com} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_x & 0 \\ 0 & \Lambda_y \end{bmatrix} \quad (5)$$

Onde

F_a : vetor força correspondente aos novos nós I e J

F_b : vetor força correspondente aos antigos nós I_b e J_b

Q_a : vetor deslocamento correspondente aos novos nós I e J

Q_b : vetor força correspondente aos antigos nós I_b e J_b

A_x, A_y : matrizes de translação correspondentes aos nós I e J, respectivamente

0 : matriz nula

Seja K_b a matriz de rigidez da barra relativa aos eixos globais de referência, correspondente aos pontos I_b e J_b . Então

$$F_b = K_b Q_b \quad (6)$$

Pré-multiplicando-se ambos os membros da equação (6) pela matriz de translação L tem-se , com base em (5)

$$A F_b = A K_b Q_b \quad \text{ou} \quad F_a = A K_b A^T Q_a \quad (7)$$

Donde se conclui que a matriz de rigidez transladada para os nós I e J é dada por

$$K_a = A K_b A^T \quad (8)$$

O vetor de ações nodais equivalentes do elemento é transformado diretamente com o que se expressa na primeira das equações (5).

Para que a implementação computacional seja eficiente importa tirar partido das características da matriz A . É prudente promoverem-se as operações matriciais particionando-a da maneira apresenta na equação (5), evitando-se os produtos por zeros, que aumentam o tempo de processamento e podem gerar imprecisões. As submatrizes A_x e A_y por sua vez também devem ser particionadas, observando-se a presença de submatrizes identidade e nula em sua composição (CORRÊA, 1991).

3 APLICAÇÃO DE BARRAS COM TRECHOS RÍGIDOS

As adaptações mostradas no item anterior abrem muitas possibilidades de modelagem. Uma delas, já citada, é a consideração de nós de dimensões finitas. As interseções de eixos de barras definem as posições dos nós. Os trechos realçados na figura 3 são considerados rígidos. Nos edifícios de concreto armado, por causa das dimensões usuais das peças, é mais comum a consideração de trechos rígidos de barras representativas de vigas do que de pilares.

A simulação de trecho rígido poderia ser feita sem o recurso do *offset*, com a utilização de elementos de grande rigidez. O pórtico da figura 3 poderia ser discretizado de modo que os trechos rígidos fossem representados por elementos de grande rigidez. Neste caso, haveria o acréscimo de, pelo menos, dois nós e duas barras para cada vão de viga por pavimento, admitindo-se apenas trecho rígido de viga. Isto aumentaria significativamente o tempo de processamento por se ter mais graus de liberdade, mais elementos e maior largura de semibanda da matriz de rigidez global. Isto por si só já desaconselha tal procedimento. Mas há uma questão de difícil definição e que depende do problema analisado e de aspectos computacionais: o que é uma rigidez suficientemente grande para se alcançar o objetivo da simulação e sem perturbar a estabilidade numérica da solução? Sabe-se que a discrepância muito acentuada de rigidez no modelo pode produzir um resultado desastroso e, o que é pior, sem controle por parte do usuário e dependente do tratamento dado às variáveis reais pelo *software* utilizado. A experiência com o sistema LASER (CORREA, 1991), desenvolvido em FORTRAN e com a resolução do sistema de equações em reais de precisão dupla (8 bytes), mostrou-se bem sucedida com a adoção de trechos de viga de largura igual à do pilar e altura igual ao pé-direito.

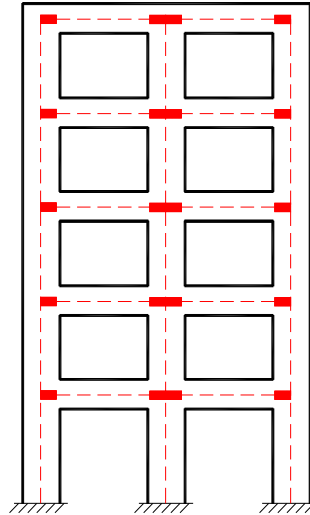


Figura 3 – Pórtico plano - trechos rígidos.

Outra aplicação interessante é a mudança de eixos de pilares, que pode ser resolvida de maneira muito elegante com a utilização de trechos rígidos, como se ilustra na figura 4. Em detalhe tem-se o nó como o ponto de interseção dos eixos da barra-viga com a barra-pilar inferior e trechos rígidos horizontais para a viga e para a barra-pilar superior.

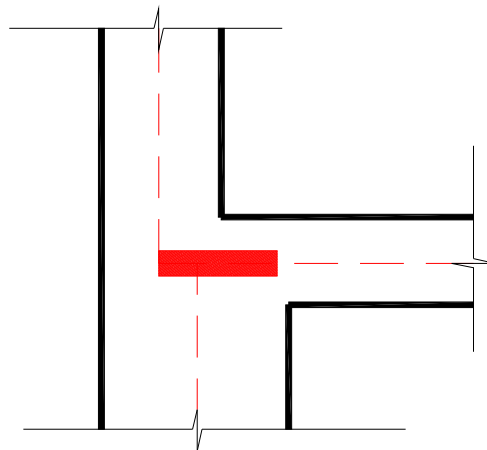


Figura 4 – Mudança de eixos de pilares.

Na análise de pavimentos de edifícios há outra aplicação interessante do conceito de *offset*. É a simulação do apoio em pilares, considerando-se as dimensões de sua seção transversal. A figura 5 apresenta, em planta, uma região de um pavimento em que duas vigas se apóiam sobre um pilar. O ponto de apoio localiza-se no centróide da seção do pilar e as barras que simulam as vigas são adotadas com os trechos rígidos realçados na figura. Observe-se que a adoção desses trechos rígidos está de acordo com a hipótese da manutenção da seção plana do pilar e incorpora a consideração de excentricidades na aplicação de forças no pilar. No ponto de apoio, que deve ser um nó do modelo, são aplicadas as condições de contorno (restrição ou imposição de deslocamentos) ou a ligação a elementos do tipo mola para a simulação de apoio flexível. Opcionalmente, quando da consideração tridimensional da estrutura, o nó citado pode ser simplesmente o extremo de barra(s) simuladora(s) de tramo(s) de pilar.

Outras possibilidades de aplicação de trechos rígidos no projeto de estruturas de edifícios podem ser encontradas em (SCHIEL, 1971) e (CORRÊA, 1991).

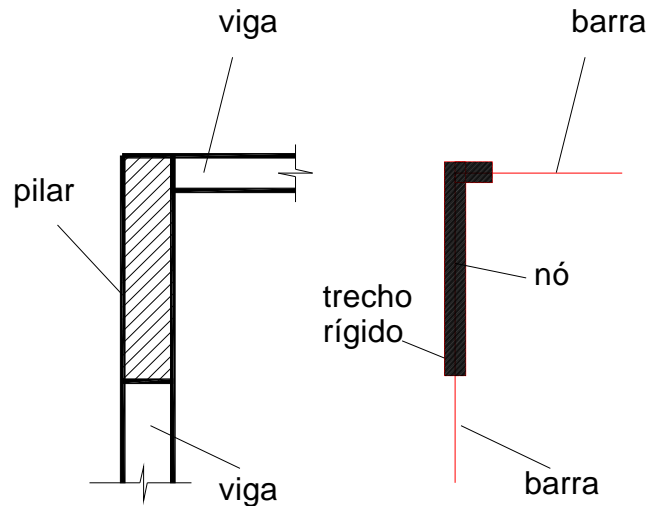


Figura 5 – Trechos rígidos em pavimento de edifício.

4 TRECHOS RÍGIDOS NA ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

O desenvolvimento teórico pode ser feito com uma aplicação do PTV de forma análoga à realizada na seção 2. Trata-se, em resumo, de compensação de deslocamentos, traduzidas por condições de compatibilidade que interligam translações e rotações. Estas últimas devem ser pequenas, de modo que seja possível a linearização de sua influência nas translações. A rigor a transformação contragradiente vale desde que se trabalhe com as diferenciais dos deslocamentos (ELIAS 1986), como se mostra a seguir.

Uma transformação cinemática não-linear entre dois conjuntos de deslocamentos Q_a e Q_b pode ser organizada matricialmente como

$$Q_b = \Gamma^T Q_a \quad (9)$$

Onde Γ é função dos deslocamentos Q_a . A transformação correspondente às diferenciais dos deslocamentos tem a forma

$$\delta Q_b = \Lambda^T \delta Q_a \quad \text{onde} \quad \Lambda_{ij} = \frac{\partial Q_{b,i}}{\partial Q_{a,j}} \quad (10)$$

Sendo F_b e F_a , dois sistemas de forças estaticamente equivalentes, associadas, respectivamente, aos deslocamentos Q_b e Q_a , tem-se, por causa da invariância do trabalho virtual, que

$$F_b^T \delta Q_b = F_a^T \delta Q_a \quad (11)$$

Combinando-se, adequadamente as equações (10) e (11) chega-se a

$$F_a = \Lambda F_b \quad (12)$$

Assim, é possível tratar os trechos rígidos, quando há relações não-lineares de deslocamentos, de forma semelhante ao caso linear, lembrando-se que os elementos da matriz Λ são, agora, funções dos deslocamentos Q_a . É necessário que se promova uma análise incremental, sendo os deslocamentos em cada incremento suficientemente pequenos, de modo a ser boa a sua aproximação pelas diferenciais. Cabe observar que tal consideração simplificada diz respeito às transformações de coordenadas que devem ser operadas nas matrizes e vetores de cada barra para a consideração de diafragmas e trechos rígidos, como se fez na seção 2.

As transformações expressas pelas equações (9) e (10) podem ser reescritas, em notação indicial, como

$$Q_{b,l} = \Gamma_{lj} Q_{a,t} \quad (13)$$

$$F_{a,l} = \Lambda_{lk} F_{b,k} \quad (14)$$

A repetição de índices nas expressões anteriores significa somatório.

Considere-se a mudança de coordenadas que permite transformar o vetor dos deslocamentos Q_b e o vetor das forças F_b nos pares Q_a e F_a , respectivamente, quando as relações entre as grandezas cinemáticas não é linear.

A energia potencial, escrita em função das coordenadas originais, é dada por

$$\Pi = U(Q_b) - F_{b,t} Q_{b,t} \quad (15)$$

A equação de equilíbrio correspondente ao parâmetro de deslocamento Q_k é encontrada derivando-se a equação (15) em relação a Q_k . Assim

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_{a,k}} = \frac{\partial U}{\partial Q_{a,k}} - \frac{\partial (F_{b,t} Q_{b,t})}{\partial Q_{a,k}} = \frac{\partial U}{\partial Q_{b,l}} \frac{\partial Q_{b,l}}{\partial Q_{a,k}} - F_{b,t} \frac{\partial (Q_{b,t})}{\partial Q_{a,k}} \quad (16)$$

Tendo-se em vista as equações (10) e (11) pode-se reescrever a expressão anterior como

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q_{a,k}} = \frac{\partial U}{\partial Q_{b,l}} \Lambda_{kl} - F_{a,k} \quad (17)$$

A primeira parcela, correspondente à derivação da energia de deformação em relação ao parâmetro Q_k , pode ser modificada com base nas equações (10) e (14)

$$\frac{\partial U}{\partial Q_{a,k}} = K_{b,s,t,j} Q_{b,j} \Lambda_{kt} \quad (18)$$

Escrevendo-se $Q_{b,j}$ em função dos deslocamentos Q_a , a partir de (9), pode-se reescrever (18) como

$$\frac{\partial U}{\partial Q_{a,k}} = K_{b,s,t,j} \Gamma_{t,j} Q_{a,i} A_{k,i} \quad (19)$$

Finalmente chega-se ao elemento genérico da matriz de rigidez secante expressa em função dos deslocamentos Q_a , pois como

$$\frac{\partial U}{\partial Q_k} = K_{a,s,kl} Q_i \quad (20)$$

Tem-se que

$$K_{a,s,kl} = A_{k,i} K_{b,s,t,j} \Gamma_{t,j} \quad \text{ou} \quad K_{a,s} = \Lambda K_{b,s} \Gamma^T \quad (21)$$

Quando a transformação é linear tem-se $\Gamma = \Lambda$ e chega-se, então, a equação análoga à (8), apresentada na seção 2.

Para a obtenção da matriz tangente é necessário encontrar as derivadas segundas da energia de deformação em relação aos parâmetros de deslocamento Q_a . Assim

$$K_{a,T,ik} = \frac{\partial^2 U}{\partial Q_{a,i} \partial Q_{a,k}} = \frac{\partial}{\partial Q_{a,i}} \left(\frac{\partial U}{\partial Q_{a,k}} \right) \quad (22)$$

Operando-se adequadamente as derivadas de função de função chega-se a

$$K_{a,T,ik} = \frac{\partial}{\partial Q_{a,i}} \left(\frac{\partial U}{\partial Q_{b,j}} \frac{\partial Q_{b,j}}{\partial Q_{a,k}} \right) = \frac{\partial}{\partial Q_{a,i}} \left(\frac{\partial U}{\partial Q_{b,j}} \right) \frac{\partial Q_{b,j}}{\partial Q_{a,k}} + \frac{\partial U}{\partial Q_{b,j}} \frac{\partial}{\partial Q_{a,i}} \left(\frac{\partial Q_{b,j}}{\partial Q_{a,k}} \right) \quad (23)$$

Combinando-se (9), (13), (20) e (23) tem-se que

$$\begin{aligned} K_{a,T,ik} &= \frac{\partial Q_{b,i}}{\partial Q_{a,i}} \frac{\partial^2 U}{\partial Q_{b,i} \partial Q_{b,j}} \frac{\partial Q_{b,j}}{\partial Q_{a,k}} + \frac{\partial U}{\partial Q_{b,j}} \frac{\partial}{\partial Q_{a,i}} \left(\frac{\partial Q_{b,j}}{\partial Q_{a,k}} \right) \\ &= A_{i,i} K_{b,T,t,j} A_{k,j} + K_{b,s,t} Q_{b,t} \frac{\partial}{\partial Q_{a,i}} (A_{k,j}) \\ &= A_{i,i} K_{b,T,t,j} A_{k,j} + \frac{\partial}{\partial Q_{a,i}} (A_{k,j}) K_{b,s,t} \Gamma_{m,t} Q_{b,m} \end{aligned} \quad (24)$$

No caso da transformação ser linear, as derivadas de Γ_{kj} se anulam e o elemento genérico da matriz de rigidez tangente é dado simplesmente por

$$K_{a,T,ik} = A_{i,i} K_{b,T,t,j} A_{k,j} \quad \text{ou}$$

$$K_{c,T} = A_i K_{c,T} \Delta F \quad (25)$$

5 ESTRATÉGIA SIMPLIFICADORA

Uma estratégia interessante para o tratamento dos trechos rígidos consiste em adotar-se linear o relacionamento entre os deslocamentos para a montagem de matrizes e vetores que contribuem no sistema global, como se fossem uma fotografia da situação em um determinado instante. Após a estimativa dos deslocamentos nodais, essas relações são atualizadas com as suas características não-lineares, para que se possa calcular os desequilíbrios do vetor de forças, ou as parcelas do vetor de forças ainda não equilibradas, que são incorporadas no próximo passo, para que se faça a estimativa de incrementos adicionais dos deslocamentos.

Pode-se compreender a idéia da estratégia proposta a partir do exemplo simples apresentado a seguir. Considere-se a viga da figura 6. O trecho em balanço é suposto rígido. Já o trecho entre o apoio fixo e o engaste fixo é simulado por uma barra flexível, sendo que o grau de liberdade considerado é a rotação sobre o apoio. Supõe-se que a força aplicada mantenha a sua direção e o ponto de aplicação.

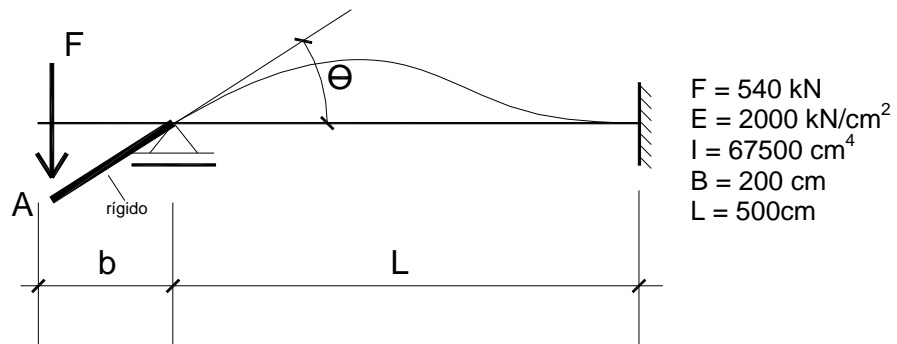


Figura 6 – Exemplo de tratamento do trecho rígido.

Os deslocamentos do ponto de aplicação da força vertical, denominado por A na figura 6, dependentes da rotação sobre o apoio, influenciam o momento aplicado no extremo flexível da viga. Para uma dada rotação θ , esse momento é igual a $F \cdot b \cdot \cos \theta$. Supondo-se que o comportamento da viga seja linear, buscando-se evidenciar apenas a questão do trecho rígido, pode-se escrever o equilíbrio na posição deslocada como

$$F b \cos \theta = \frac{4EI\theta}{L} \quad (26)$$

Substituindo-se os valores numéricos das características geométricas e elásticas da viga tem-se

$$F \cos \theta = 5400 \theta \quad (27)$$

Buscando-se estimar o incremento de deslocamentos correspondente a uma dada força aplicada ΔF , assume-se que a relação entre os deslocamentos do ponto A e a rotação é linear. Então, o momento considerado se torna simplesmente $F \cdot b$, o que corresponde a se fazer $\cos \theta = 1$ nas equações (26) e (27), que só vale no início, quando $\theta = 0$. O desenvolvimento do processo

iterativo pode ser acompanhado na tabela a seguir, onde a partir das estimativas dos incrementos de rotação, feitas com $\theta = 1$, calcula-se a rotação acumulada e a força correspondente a essa rotação. Caso ela não seja igual à força que se aplica na viga, determina-se o desequilíbrio ΔF a ser aplicado de modo a se calcular novo incremento de rotação e, assim por diante, até que ocorra a convergência, ou seja, até que a rotação acumulada corresponda a uma força igual à que se pretende aplicar.

Tabela 1 – Processo iterativo

ΔF (kN)	$\Delta \theta$ (rad)	F (rad)	F=5400 θ /cos θ (kN)
540,000000	0,100000	0,100000	542,711296
-2,711296	-0,000502	0,099498	539,959253
0,040747	0,000008	0,099505	540,000609
-0,000609	0,000000	0,099505	539,999991
0,000009	0,000000	0,099505	540,000000
0,000000	0,000000	0,099505	540,000000

Esse tratamento iterativo das relações não-lineares no trecho rígido permite adaptar o *software* para análise linear de maneira simples, promovendo-se as correções em cada iteração simultaneamente com as habituais que são realizadas mesmo quando não há trechos rígidos. Outro ponto importante a se considerar é que as matrizes dos elementos que contribuem na matriz de rigidez do sistema mantêm a sua simetria, o que não está garantido em (21) e (24), mesmo com a consideração de que as rotações sejam pequenas.

6 CONCLUSÃO

Apresentou-se uma formulação para a consideração de trechos rígidos na análise estrutural realizada via Processo dos Deslocamentos, baseada em aplicação do PTV. A formulação foi originalmente mostrada para os casos em que os problemas são geometricamente lineares. Foi, também, feita uma extensão aos problemas com não-linearidade geométrica, mostrando-se uma estratégia simplificadora mediante a utilização de procedimento iterativo, que é usualmente empregado em problemas não-lineares. Foram discutidas brevemente as adaptações necessárias para a incorporação do recurso dos trechos rígidos, exemplificado no caso do elemento de barra.

7 REFERÊNCIAS

- CORRÊA, M. R. S. **Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios**. 1991. 331 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1991.
- ELIAS, Z. E. **Theory and methods of structural analysis**. New York: John Wiley & Sons, 1986.
- SCHIEL, F. **Estática de Estaqueamentos**. São Carlos, SP: Editora da EESC-USP, 1971. (Notas de Aula).
- WEAVER Jr., W. **Computer programs for structural analysis**. Princeton: D. Van Nostrand, Inc., 1967.