

## INTRODUÇÃO À TÉCNICA DE CAMADA-LIMITE

Fabio Carlos da Rocha<sup>1</sup>

### Resumo

*Muitos estudos na área de materiais compósitos são baseados no Método de Homogeneização Assintótica (MHA), o qual consiste na substituição do meio originalmente heterogêneo por outro meio homogêneo com propriedades efetivas (ou globais). Embora a formulação clássica do MHA forneça bons resultados no interior de sólidos compósitos, ela não pode ser aplicada na proximidade do contorno destes sólidos. A transmissão do carregamento aplicado no contorno para o interior do compósito ocorre por uma redistribuição das tensões entre os componentes constitutivos (inclusões e matriz). Esta redistribuição envolve singularidades fortes no campo de tensão local, as quais podem resultar em falhas microscópicas da estrutura composta. Tendo em vista este tipo de aplicação envolvendo mudanças bruscas das variáveis dependentes, tais como o campo de tensão, apresenta-se aqui um procedimento de construção de solução assintótica para um problema modelo utilizando corretores obtidos da teoria de camada limite.*

*Palavras-chave: Método de homogeneização assintótica. Camada limite.*

## INTRODUCTION TO THE BOUNDARY-LAYER TECHNIQUE

### Abstract

*Many studies in the theory of composite materials are based on the Asymptotic Homogenization Method (AHM), which consists of considering the original heterogeneous medium as a homogeneous medium with effective (or global) properties. Although the classical AHM formulation yields good results in the interior of composite solids, it cannot be applied near the boundary of these solids. The transmission of boundary loads to the interior of the composite occurs by a redistribution of stresses between the constituent components (inclusions and matrix). This redistribution involves strong singularities in the local stress field, which may result in microscopic failures of the composite structure. In view of this kind of application involving abrupt changes of dependent variables, such as the stress field, a procedure to construct an asymptotic solution for a model problem by using correctors obtained from the boundary layer theory is presented here.*

*Keywords: Asymptotic homogenization theory. Boundary layer.*

## 1 INTRODUÇÃO

Inicia-se a apresentação deste trabalho com uma contextualização da teoria da Camada Limite na história, mostrando o surgimento e a importância que esta teoria proporcionou no avanço da ciência.

O surgimento da teoria da camada limite ocorreu durante o terceiro congresso internacional de matemática realizado, em 1904, na cidade alemã de Heidelberg. Neste evento estava presente Ludwig Prandtl, de 29 anos, professor da *Technische Hochschule* em Hanover. Prandtl realizou sua apresentação em apenas 10 minutos, mas foi o tempo suficiente para descrever o conceito de camada

<sup>1</sup> Doutorando em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, fabcivil@sc.usp.br

limite do fluxo de fluido sobre uma superfície. O artigo correspondente à apresentação contém apenas oito páginas e foi publicado nos anais do congresso com o título *Uber Flussigkeitsbewegung Bei Sehr Kleiner Reibung* (O Movimento de Fluidos com Muito Pouco Atrito). Em 2005, na celebração do Ano Mundial da Física que homenageou Albert Einstein, e seu famoso artigo de 1905, foi também celebrado o centenário do artigo de Prandtl. Este evento serviu para lembrar a importância das idéias de Prandtl no mundo moderno da aerodinâmica e dinâmica dos fluidos (ANDERSON, 2005).

Até a realização do congresso, os pesquisadores que utilizavam as equações de Navier-Stokes para modelar um fluido em movimento não conseguiam calcular satisfatoriamente forças cisalhantes de atrito entre o fluido e superfícies imersas no mesmo. Essa dificuldade acentuou-se no início do século XX, com a invenção do avião e com a necessidade subsequente de calcular as forças de levantamento e de arraste em aeronaves.

Em seu artigo, Prandtl assumiu escoamento invíscido em regiões longe da superfície e considerou a existência de uma camada com pequena espessura na proximidade da superfície, chamada de Camada Limite, onde a viscosidade do fluido não pode ser desprezada.

Um dos resultados de Prandtl foi a ocorrência da mudança brusca de velocidade sobre uma curta distância normal à superfície de um corpo imerso em um fluido em movimento. No caso de fluidos Newtonianos, a tensão cisalhante é proporcional ao gradiente de velocidade, o que resulta em uma grande variação da tensão cisalhante dentro da camada limite. Assim, o atrito da força de arraste no corpo não pode ser desprezado, contrariando o que alguns pesquisadores do século XIX acreditavam.

Apesar da importância do trabalho de Prandtl, este não teve disseminação proporcional à grandiosidade do feito que seu conceito proporcionou à dinâmica dos fluidos. Acredita-se que diversos fatores contribuíram para isto; dentre eles, a dificuldade de divulgação de informação na época quando comparado com os dias atuais. Em 1908 um estudante de Prandtl, Heinrich Blasius, deu continuidade à divulgação da teoria de camada limite publicando, no respeitado jornal *Zeitschrift Fur Mathematik Und Physik*, o trabalho intitulado “Camada limite em fluidos com pouco atrito”. Neste trabalho, Blasius considera o escoamento bidimensional do fluido sobre uma placa plana, ou, um cilindro circular e analisa o comportamento do fluido na região da camada limite (TANI, 1997).

Blasius resolveu as equações de camada limite em ambos os casos. Para o problema de placa plana, ele obteve resultados mais precisos para o atrito de arraste do que os resultados obtidos por Prandtl em seu artigo de 1904. Para o cilindro circular, a sua solução forneceu o ponto de separação da camada limite à superfície do sólido. As equações de camada limite, embora mais simples do que as equações de movimento de Navier-Stokes, ainda contêm equações diferenciais acopladas. Contudo, para certos tipos de gradiente de pressão, estas equações reduzem-se a uma única equação diferencial ordinária. Esta simplificação acontece, por exemplo, para uma pressão constante ao longo da placa plana orientada paralelamente ao fluxo, isto é, para um ângulo zero “de ataque”. Na verdade, a equação utilizada em placas planas com ângulo “de ataque” zero é conhecida hoje como equações de Blasius (TANI, 1997).

Apesar da importância do trabalho de Blasius e da publicação de diversos artigos que se seguiram sobre a teoria de camada limite pelo grupo de pesquisa de Prandtl, a comunidade aerodinâmica deu pouca importância a esta teoria, especialmente os especialistas fora da Alemanha. Finalmente, em 1921, Theodore Von Kármán, um ex-aluno de Prandtl e professor da Universidade de Aachen, Alemanha, obteve uma equação integral do momentum para a equação de camada limite. Devido à grande aplicabilidade desta equação integral em um grande número de problemas práticos da Engenharia, a teoria da camada limite finalmente começou a receber a aceitação da comunidade técnica (ANDERSON, 2005).

Após meados de 1920, trabalhos que objetivavam avançar, ampliar e aplicar a teoria de camada limite tiveram um aumento exponencial, comprovado pelo grande número de especialistas em dinâmica dos fluidos e aerodinâmicos que desenvolveram suas carreiras no estudo da teoria da camada limite (ANDERSON, 1998). A primeira aplicação industrial ocorreu no final da década de 20, quando os projetistas começaram a utilizar os resultados da teoria para prever a força de arraste e a força de sustentação na superfície dos dirigíveis e aviões. Até então, os valores destas grandezas físicas eram obtidas de experimentos realizados em túneis de vento, os quais eram utilizados para o cálculo da força de sustentação. No entanto, as aquisições dos dados experimentais para o cálculo da força de atrito eram de difícil obtenção. Além disso, os experimentos em túnel de vento eram notoriamente imprecisos e os projetistas estavam relutantes na aceitação dos resultados da teoria. Mas, desde o final dos anos de 1920, os valores da força de atrito obtidos através da teoria da camada limite, sendo estes mais precisos, tornaram-se mais valorizados, o que proporcionou a esta teoria ser uma ferramenta padrão para os projetistas de avião.

Apesar da teoria da camada limite ter sido aplicada inicialmente na aerodinâmica e, posteriormente, na dinâmica dos fluidos, estas não foram as únicas áreas a receberem a sua contribuição. Prandtl, pioneiramente, iniciou o tratamento de expansões assintóticas para soluções de equações diferenciais que possuem parâmetros pequenos, antecipando em meio século as idéias básicas da teoria de perturbações singulares, a qual tem atualmente um profundo impacto na Engenharia e Matemática.

No estudo dos materiais compósitos, os quais são materiais heterogêneos constituídos por dois ou mais materiais homogêneos, tem-se a necessidade de conhecer suas características e determinar suas propriedades efetivas (ou globais). Evidentemente, materiais compósitos providos de microestruturas complexas ou aleatórias não são simples de modelar. O Método de Homogeneização Assintótica (MHA) (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989); (BENSOUSSAN et al., 1978) e (SANCHEZ-PALENCIA, 1980) fornece um modelo simples do comportamento de material compósito provido de estrutura periódica em seu interior. O método consiste em utilizar uma expansão assintótica da solução do problema associado ao meio heterogêneo para obter um problema com coeficientes efetivos constantes, chamado de problema de homogeneização, que está associado a um meio homogêneo equivalente.

Embora a homogeneização assintótica conduza a problemas mais simples, a construção de soluções na vizinhança do contorno do sólido, originalmente composto, permanece além da capacidade da homogeneização clássica, (KALAMKAROV, 1992), (GUZ'; KOKHANENKO, 1995), (ADRIANOV et al., 2010) e (DUMONTET, 1986).

No trabalho de (SANCHEZ-PALENCIA, 1986) foram apresentados resultados, por meio do MHA, de problemas da mecânica dos meios compósitos. Dentre os resultados, tem-se o problema de camada limite que está presente em regiões onde a microestrutura é quase periódica, ou seja, regiões em que a solução em expansão assintótica é quase periódica na variável microscópica, tendo assim, a necessidade de expressões adicionais à expansão assintótica para que na região próxima as condições de contorno a solução as obedeçam.

Em (PETIT, 1969) foram realizadas investigações de materiais compósitos laminados submetidos a carregamentos de tração e o autor mostra a ocorrência de anomalias na borda das lâminas. O efeito de borda livre é explicado por (PETIT, 1969), o qual partiu dos pressupostos básicos da teoria de placas laminadas em que as deformações são constantes, ou, são funções lineares da distância a partir da superfície média do laminado. Este pressuposto faz parte da hipótese de Kirchhoff, o qual assume a compatibilidade entre as deformações das lâminas. Como resultado desta hipótese, as lâminas submetidas à tensão axial desenvolvem tensões de cisalhamento nas interfaces entre as mesmas. Estas tensões alternam em sinal de uma lâmina orientada em  $+\theta$  para uma lâmina orientada

em  $-\theta$ . Assim, a tensão cisalhante resultante nas interfaces das lâminas anula-se. No entanto, nas extremidades do laminado a tensão cisalhante resultante é não nula para quaisquer condições de contorno; ou seja, caso as condições impostas nas extremidades do laminado sejam de tensão cisalhante resultante nula, está não será obedecida. Assim, há uma região próxima às extremidades do laminado, denominada aqui de camada limite, em que as hipóteses de Kirchhoff não são válidas.

Para contornar este problema (TANG,1975) e (TANG; LEVY, 1975) usam uma expansão em serie para obter a solução do campo de tensão, fazendo com que esta expansão satisfaça as condições de contorno na camada limite. Esta expansão fornece resultados que satisfazem as equações de equilíbrio e as condições de contorno, assim como as condições de continuidade de deslocamento e de tensão normal interlaminar.

A teoria de camada limite juntamente com o Método de Homogeneização Assintótica são aplicados por (KALAMKAROV, 1992) para resolver problema de fratura em compósitos periódicos, por (ADRIANOV et al., 1985) na teoria de cascas e placas nervuradas e por (KALAMKAROV; GEORGIADÉ, 2002) em compósitos periódicos inteligentes, ou seja, compósitos que possuem uma ou mais propriedades que podem ser significativamente alteradas de forma controlada por estímulos externos, tais como carregamento mecânico, temperatura, umidade, pH, campos elétricos e magnéticos. Em (BENSOUSSAN et al., 1978) é mostrado que a solução em expansão assintótica de problemas associados a estruturas periódicas, na região da camada limite, possui decaimento exponencial.

Estudos de camadas limites em problemas de valor de contorno (PVCs) elípticos com coeficientes periodicamente oscilantes definidos em domínios retangulares e de geometria qualquer foram realizados, utilizando o MHA, por (ALLAIRE; AMAR, 1999) e (NEUSS-RADU, 2000), respectivamente. Estes autores utilizam corretores à solução do PVC para que esta seja válida na vizinhança do contorno. Em (ALLAIRE; AMAR, 1999) é proposto para os corretores a característica de decaimento exponencial. Já em (NEUSS-RADU, 2000), o autor mostra por meio de um exemplo que o decaimento exponencial não é suficiente para estudar camadas limites em domínios gerais.

Em (PANASENKO, 2008) apresenta-se a utilização de corretores à solução em expansão assintótica, os quais garantem que as condições de contorno sejam satisfeitas. Para tanto, o autor utiliza a técnica de camada limite para encontrar as expressões dos corretores com características de decaimento exponencial. Estas expressões contêm, no entanto, erros, possivelmente tipográficos. Neste trabalho apresenta-se um estudo detalhado do artigo de (PANASENKO, 2008). Em particular, obtém-se a expressão correta da solução analítica do problema tratado pelo autor em regiões próximas do contorno.

O artigo é organizado como segue. Apresenta-se na Sec. 2 a técnica de camada limite, mostrando o procedimento utilizado na construção de corretores para as expansões assintóticas. Na Seção 2.1 mostra-se um exemplo onde se aplica a técnica apresentada e ilustra-se, através de gráficos, a atuação dos corretores na solução assintótica, fazendo com que esta solução satisfaça as condições de contorno. Na Seção 3 apresentam-se conclusões sobre o uso dos corretores obtidos da teoria de camada limite.

## 2 INTRODUÇÃO À TÉCNICA DE CAMADA LIMITE

Antes de apresentar a técnica de camada limite, introduzem-se alguns conceitos da teoria de perturbação.

A teoria de perturbação é uma coleção de métodos iterativos para a obtenção de soluções aproximadas de problemas que envolvem um parâmetro pequeno,  $\varepsilon \ll 1$ , também chamado de parâmetro de perturbação.

De modo geral, a teoria de perturbação realiza uma decomposição de um problema complexo em um número infinito de problemas possíveis de serem resolvidos. As potencialidades desta teoria residem no fato de que, em geral, os primeiros termos da expansão assintótica, por exemplo, a ansatz de (BAKHVALOV; PANASENKO, 1989), são suficientes para revelar características importantes de um problema.

Existem dois tipos de perturbações em equações diferenciais com o parâmetro pequeno, que são as perturbações regulares e as singulares.

Do ponto de vista matemático, os problemas de perturbação singular estão associados ao parâmetro de perturbação que multiplica a derivada de ordem mais elevada na equação. Quando a multiplicação do parâmetro pequeno vem nos termos de ordem inferior da equação diferencial, esta perturbação é chamada de perturbação regular. No caso de perturbação singular, quando o parâmetro pequeno tende a zero, ocorre a degeneração da equação diferencial. Neste caso, a equação diferencial não pode mais atender as condições de contorno especificadas no problema original e, portanto, o problema não pode ser resolvido. Do ponto de vista físico, o surgimento de perturbações singulares está associado ao surgimento de uma região onde existe mudança brusca no valor da variável dependente, caracterizando a existência de uma camada limite. Nesta região é realizada uma ampliação de escala das variáveis dependentes para a obtenção de expressões corretivas à expansão assintótica (KEVORKIN; COLE, 1981).

O método de camada limite consiste em duas etapas. Na primeira etapa é realizada a construção, em expansão assintótica, de uma solução válida em todo espaço sem considerar as condições de contorno. A segunda etapa consiste na construção de alguns corretores à expansão da solução obtida na primeira etapa. Estes corretores possuem a característica de decaimento exponencial quando se afasta do contorno.

Considere o seguinte problema modelo de perturbação singular:

$$\varepsilon^2 u''(x) - u(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

$$u(0) = g_1, \quad u(1) = g_2, \quad (2)$$

onde  $u' \triangleq du/dx$ ,  $\varepsilon$  é um parâmetro pequeno e  $f \in C^\infty([0,1])$ .

**Primeira etapa:** Considera-se uma ansatz

$$\bar{u}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \bar{u}_l(x). \quad (3)$$

Formalmente, segue da Eq. (3) que

$$\bar{u}''(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \bar{u}_l''(x). \quad (4)$$

Substituindo as Eqs. (3) e (4) em (1), tem-se

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l+2} \bar{u}_l''(x) - \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \bar{u}_l(x) = f(x). \quad (5)$$

Realizando sucessivas mudanças de índices no primeiro termo da Eq. (5) e definindo  $u_{-1} = 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{L=1}^{\infty} \varepsilon^{2L} \bar{u}_{L-1}''(x) - \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \bar{u}_l(x) &= f(x), \\ \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \bar{u}_{l-1}''(x) - \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \bar{u}_l(x) &= f(x), \\ \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} (\bar{u}_{l-1}''(x) - \bar{u}_l(x)) &= f(x), \end{aligned} \quad (6)$$

A relação (6)<sub>3</sub> gera uma recorrência de equações dada por

$$\bar{u}_l(x) = \bar{u}_{l-1}''(x) - f(x) \delta_{l0}, \quad l = 0, 1, \dots \quad (7)$$

Esta recorrência define todos os termos  $\bar{u}_l$  da ansatz (3), a qual pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(x) &= -f(x), \\ \bar{u}_1(x) &= \bar{u}_0''(x) = -f''(x), \\ \bar{u}_2(x) &= \bar{u}_1''(x) = -f^{(IV)}(x), \\ &\dots \\ \bar{u}_l(x) &= \bar{u}_{l-1}''(x) = -f^{(2l)}(x). \end{aligned} \quad (8)$$

Assim, a expressão assintótica da Eq. (3) toma a forma

$$\bar{u}(x) = -\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} f^{(2l)}(x). \quad (9)$$

**Segunda etapa:** Nesta segunda etapa são considerados os corretores da camada limite da forma

$$u^0 = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} u_l^0 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)$$

e

$$u^l = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} u_l^1 \left( \frac{x-1}{\varepsilon} \right),$$

onde os termos  $u_l^0$  e  $u_l^1$  estão definidos em  $\mathbb{R}^+$  e  $\mathbb{R}^-$ , respectivamente, e

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} u_l^0(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} u_l^1(\xi) = 0.$$

Substituindo a soma

$$u^{(\infty)} = \bar{u} + u^0 + u^1 \quad (10)$$

na Eq. (1) e considerando as condições de contorno da Eq. (2), tem-se

$$\left[ \varepsilon^2 \left( \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \bar{u}_l(x) \right) - \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \bar{u}_l(x) \right] + \left[ \varepsilon^2 \left( \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \frac{d^2 u_l^0(\xi)}{d\xi^2} \right) - \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} u_l^0(\xi) \right] + \left[ \varepsilon^2 \left( \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \frac{d^2 u_l^1(\eta)}{d\eta^2} \right) - \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} u_l^1(\eta) \right] = f(x). \quad (11)$$

Após realizar manipulações algébricas na Eq. (11), chega-se a

$$\left[ \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \left( \bar{u}_{l-1}(x) - \bar{u}_l(x) \right) \right] + \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \left( \frac{d^2 u_l^0(\xi)}{d\xi^2} - u_l^0(\xi) \right) \right] + \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \left( \frac{d^2 u_l^1(\eta)}{d\eta^2} - u_l^1(\eta) \right) \right] = f(x), \quad (12)$$

onde  $\xi = x/\varepsilon$  e  $\eta = (x-1)/\varepsilon$ .

Substituindo a Eq. (10) juntamente com as expressões de  $\bar{u}$ ,  $u^0$  e  $u^1$  na primeira condição de contorno da Eq. (2), obtém-se

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \left( \bar{u}_l(0) + u_l^0(0) + u_l^1\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) = g_1. \quad (13)$$

Realizando procedimento análogo com respeito à segunda condição de contorno, tem-se

$$\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \left( \bar{u}_l(1) + u_l^0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + u_l^1(0) \right) = g_2. \quad (14)$$

Será visto em seguida que a taxa de decaimento das funções  $u_l^0$  e  $u_l^1$  são exponenciais. Isto significa que existem constantes positivas  $C_l$  e  $c_l$  tais que

$$\begin{aligned} |u_l^0(\xi)| &\leq C_l \exp(-c_l \xi), \\ |u_l^1(\eta)| &\leq C_l \exp(-c_l |\eta|). \end{aligned} \quad (15)$$

Assim, para qualquer  $K$ ,  $u_l^0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$  e  $u_l^1\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$  são valores de ordem  $O(\varepsilon^K)$ . Portanto, esses termos podem ser desprezados nas Eqs. (13) e (14) com precisão da ordem de  $O(\varepsilon^K)$ . Desta forma, têm-se duas equações independentes dos problemas de camada limite, dadas por

$$\begin{aligned} -u_l^0(\xi) + \frac{d^2}{d\xi^2} u_l^0(\xi) &= 0, \quad \xi > 0, \\ u_l^0(0) &= g_1 \delta_{l0} - \bar{u}_l(0), \quad l = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

e

$$\begin{aligned} -u_l^1(\eta) + \frac{d^2}{d\eta^2} u_l^1(\eta) &= 0, \quad \eta < 0, \\ u_l^1(1) &= g_2 \delta_{l0} - \bar{u}_l(1), \quad l = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Considere  $u_l^0(\xi) \triangleq (C_l^0 \exp(-\xi) + d_l^0 \exp(\xi))$ , com  $d_l^0 \triangleq 0$  quando  $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} u_l^0 = 0$ . Aplicando na Eq. (16)<sub>2</sub>, tem-se

$$\begin{aligned} u_l^0(0) &= C_l^0 \exp(-0) = C_l^0, \\ u_l^0(0) &= -\bar{u}_l(0) + g_1 \delta_{01} = C_l^0, \\ &\quad \downarrow \\ u_l^0(\xi) &= (-\bar{u}_l(0) + g_1 \delta_{01}) \exp(-\xi). \end{aligned} \tag{18}$$

Considerando agora que  $u_l^1(\xi) \triangleq (C_l^1 \exp(-\xi) + d_l^1 \exp(\xi))$ , com  $C_l^1 \triangleq 0$  quando  $\lim_{\xi \rightarrow -\infty} u_l^1 = 0$ , tem-se, após substituição na Eq. (17)<sub>2</sub>

$$u_l^1(1) = (g_2 \delta_{10} - \bar{u}_l(1)) \exp(\eta). \tag{19}$$

Assim, todos os termos da solução estão determinados, isto é, a expansão assintótica  $u^{(\infty)}$  para o problema (1) e (2) é dada pela Eq. (10), a qual é constituída pela expansão regular, dada pela Eq. (9), e pelas expansões singulares, que são obtidas de (18) e (19) juntamente com  $\xi = x/\varepsilon$  e  $\eta = (x-1)/\varepsilon$ , dadas por

$$u^0(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} (g_1 \delta_{l0} + f^{(2l)}(0)) \exp(-x/\varepsilon), \tag{20}$$

$$u^1(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} (g_2 \delta_{l0} + f^{(2l)}(1)) \exp((x-1)/\varepsilon), \tag{21}$$

respectivamente.

As equações (20) e (21) estão erroneamente apresentadas em (PANASENKO, 2008), pois nesta referência as expressões dos corretores encontram-se com inversão de sinais.

As expressões das camadas limite, Eqs. (20) e (21), fornecem valores que são exponencialmente pequenos em qualquer distância finita do contorno. Assim, esses corretores influenciam a solução da Eq. (10) apenas na região próxima do contorno.

### 2.1 Exemplo

Considere o seguinte problema:

$$\varepsilon^2 u'' - u = \exp(x), \quad x \in (0,1), \tag{22}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 1. \tag{23}$$

Observe da Eq. (22) que  $f \in C^\infty([0,1])$ .

Pela Eq. (8), tem-se

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_0(x) &= -f(x) = -\exp(x), \\
 \bar{u}_1(x) &= \bar{u}_0''(x) = -f''(x) = -\exp(x), \\
 \bar{u}_2(x) &= \bar{u}_1''(x) = -f^{(IV)}(x) = -\exp(x), \\
 &\dots \\
 \bar{u}_l(x) &= \bar{u}_{l-1}''(x) = -f^{(2l)}(x) = -\exp(x).
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Substituindo os resultados da Eq. (24) nas Eqs. (9), (20) e (21), tem-se

$$\bar{u} = -\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \exp(x),
 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 u^0(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} (g_1 \delta_{l0} + \exp(0)) \exp(-x/\varepsilon) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} (g_1 \delta_{l0} + 1) \exp(-x/\varepsilon), \\
 u^0(x) &= \exp(-x/\varepsilon) \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} (g_1 \delta_{l0} + 1) = \exp(-x/\varepsilon) [\varepsilon^0 g_1 + \varepsilon^0 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \dots],
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

$$u^0(x) = g_1 \exp(-x/\varepsilon) + \exp(-x/\varepsilon) \left( \frac{1}{1-\varepsilon^2} \right),$$

$$\begin{aligned}
 u^1(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} (g_2 \delta_{l0} + \exp(1)) \exp((x-1)/\varepsilon), \\
 &= \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} (g_2 \delta_{l0} + \exp(1)) \exp((x-1)/\varepsilon),
 \end{aligned}$$

$$u^1(x) = \exp((x-1)/\varepsilon) \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} (g_2 \delta_{l0} + \exp(1)),
 \tag{27}$$

$$u^1(x) = \exp((x-1)/\varepsilon) [g_2 \varepsilon^0 + \varepsilon^0 \exp(1) + \varepsilon^2 \exp(1) + \varepsilon^4 \exp(1) + \varepsilon^6 \exp(1) + \dots],$$

$$u^1(x) = \exp((x-1)/\varepsilon) [g_2 + \exp(1) (\varepsilon^0 + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \dots)],$$

$$u^1(x) = g_2 \exp((x-1)/\varepsilon) + \exp((x-1)/\varepsilon + 1) \left( \frac{1}{1-\varepsilon^2} \right).$$

Substituindo as condições de contorno (23), tem-se

$$\bar{u} = -\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \exp(x),
 \tag{28}$$

$$u^0(x) = \exp(-x/\varepsilon) \left( \frac{1}{1-\varepsilon^2} \right),
 \tag{29}$$

$$u^1(x) = \exp((x-1)/\varepsilon) + \exp((x-1)/\varepsilon + 1) \left( \frac{1}{1-\varepsilon^2} \right).
 \tag{30}$$

Assim,

$$u(x) = -\sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{2l} \exp(x) + \exp(-x/\varepsilon) \left( \frac{1}{1-\varepsilon^2} \right) + \exp((x-1)/\varepsilon) + \exp((x-1)/\varepsilon + 1) \left( \frac{1}{1-\varepsilon^2} \right) \quad (31)$$

é a solução assintótica utilizando os corretores da teoria da camada limite.

A solução analítica do problema, dado pela Eq. (22) e pelas condições (23), é obtida a partir da combinação da solução particular e da solução homogênea da Eq. (22), as quais são dadas por, respectivamente,

$$u_p = \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \exp(x), \quad (32)$$

$$u_h = C_1 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (33)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são constantes. A solução analítica é, portanto, dada por

$$u = C_1 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \exp(x). \quad (34)$$

Impondo as condições de (23) na Eq. (34), esta toma a forma

$$u = \left( -\frac{1}{\varepsilon^2 - 1} - \frac{1 + \frac{(\exp(1/\varepsilon) - \exp(1))}{\varepsilon^2 - 1}}{\exp(-1/\varepsilon) - \exp(1/\varepsilon)} \right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} x\right) + \left( \frac{1 + \frac{(\exp(1/\varepsilon) - \exp(1))}{\varepsilon^2 - 1}}{\exp(-1/\varepsilon) - \exp(1/\varepsilon)} \right) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} x\right) + \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \exp(x). \quad (35)$$

Os gráficos da figura 1 mostram a sucessão de resultados obtidos à medida que o parâmetro pequeno,  $\varepsilon$ , tende a zero nas soluções consideradas: a solução analítica, a solução assintótica sem corretor e a solução assintótica utilizando os corretores obtidos da teoria da camada limite.

Através dos gráficos da figura 1 pode-se ver que a solução assintótica com corretores aproxima-se mais rápida da solução analítica, quando esta é comparada com a solução assintótica sem a utilização dos corretores

Outro fato importante é que a solução assintótica (sem corretores) não satisfaz as condições de contorno para todos os valores de  $\varepsilon$ . Se  $\varepsilon$  não é pequeno, observe desta figura que a solução assintótica com corretores também não satisfaz as condições de contorno. No entanto, à medida que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , as soluções assintóticas utilizando corretores assumem valores nas extremidades que aproximam bem às condições de contorno sem perturbar as respectivas soluções assintóticas no interior do domínio; ou seja, a influência dos corretores sobre a solução assintótica do problema no interior do intervalo (0,1) é tão menor quanto menor for  $\varepsilon$ .

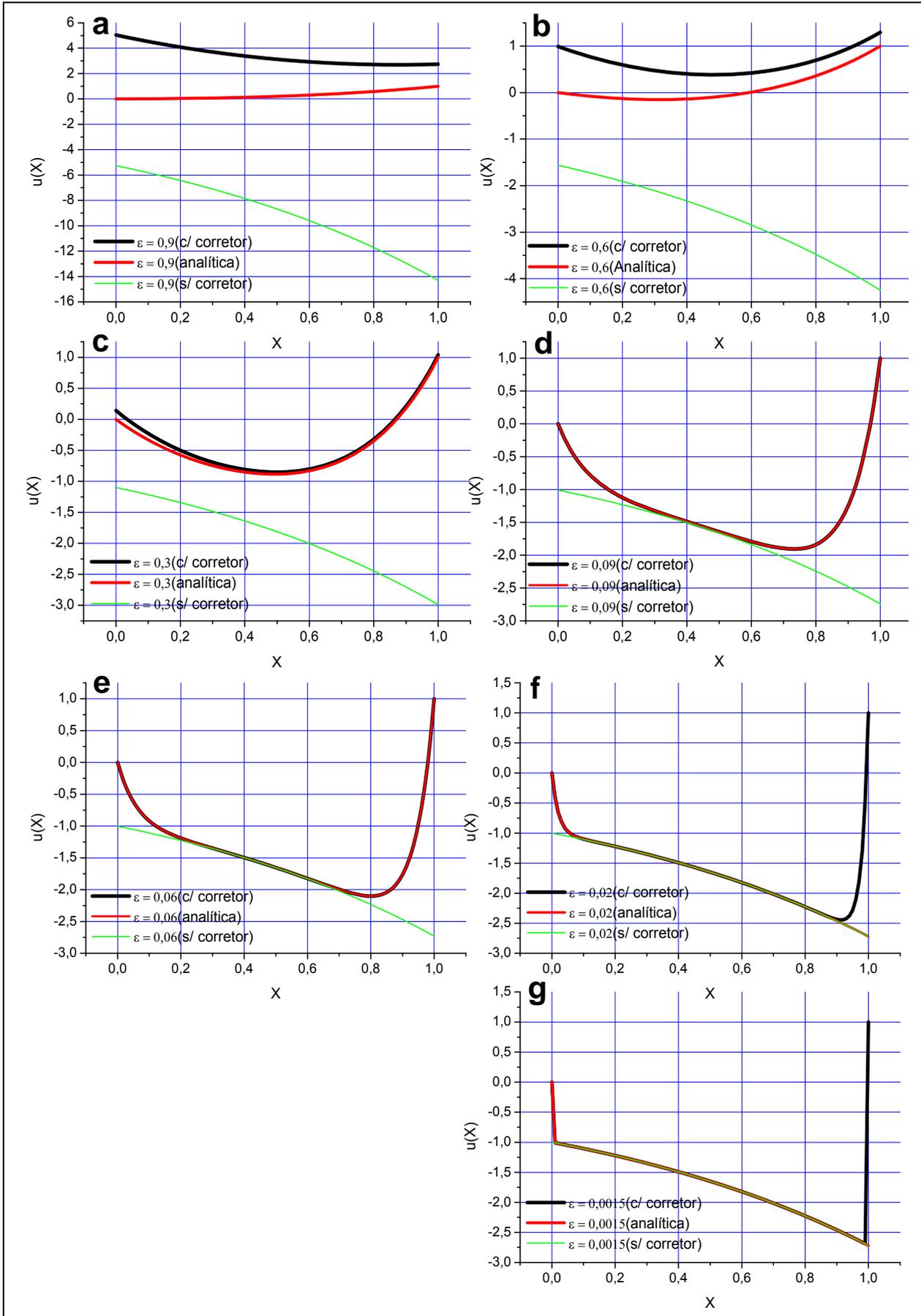


Figura 1 – Gráfico da comparação evolutiva, para  $\epsilon$  pequeno, da solução analítica com as soluções assintóticas sem e com corretores.

Tem-se ainda que para valores cada vez menores de  $\varepsilon$ , a equação diferencial (22) tende a degenerar, isto é, esta tende a mudar a ordem da equação diferencial. Para este exemplo, a ordem da equação diferencial tende a alterar de 2 para 1 quando  $\varepsilon$  tende a zero. Com esta tendência de alteração na ordem desta equação, a solução analítica na Eq. (35) não satisfaz todas as condições de contorno. Este fato pode ser percebido nos gráficos f e g da Figura 1. Observa-se destes gráficos que a solução analítica e a solução sem corretores não satisfazem as condições de contorno. Percebe-se ainda a região da camada limite nos gráficos f e g onde ocorre uma variação brusca da variável  $u$  e onde a solução analítica não é válida.

### 3 CONCLUSÕES

O método de homogeneização assintótica é uma ferramenta matemática poderosa para analisar materiais compósitos e estruturas. A análise de um material compósito não homogêneo por um sólido homogêneo equivalente é o principal resultado desta teoria. No entanto, cuidados devem ser tomados em regiões onde a microestrutura é quase periódica. Nessas regiões, há necessidade de adicionar expressões corretoras à expansão assintótica para que a solução do problema de homogeneização satisfaça as condições de contorno.

Neste trabalho obtiveram-se expressões corretas dos termos adicionais à expansão assintótica, dadas pelas Eqs. (20) e (21). No trabalho de (PANASENKO, 2008) estas duas equações encontra-se com erros tipográficos que prejudicam o entendimento e a obtenção correta da solução assintótica utilizando os corretores da teoria da camada limite.

### 4 AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, por propiciar as condições de infra-estrutura necessárias, e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), por conceder o suporte financeiro para o desenvolvimento deste trabalho. O autor manifesta, também, seus mais sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Julián Bravo-Castillero por proporcionar a fundamentação teórica para o desenvolvimento deste trabalho por meio das aulas ministradas e valiosas trocas de idéias. Professor Julián Bravo-Castillero recebeu apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) na modalidade Bolsista CAPES/Brasil do Programa Professor Visitante do Exterior – PVE, Ofício/CGI/CAPES N° 0452-11/2010. O autor agradece ao Prof. Dr. Adair Roberto Aguiar pelas contribuições ao desenvolvimento deste trabalho.

### 5 REFERÊNCIAS

- ALLAIRE, G.; AMAR, M. Boundary Layer Tails in Periodic Homogenization. **COCV**, n.4, p. 209-243, 1999.
- ANDERSON, D. J. Ludwig Prandtl's Boundary layer, **Physics Today**, v.58, n. 12, p. 42-48, 2005.
- ANDERSON, D. J. **A History of Aerodynamics**, Cambridge U. Press, New York, 1998.
- ADRIANOV, I. V.; DANISHEVS'KYY, V. V.; WEICHERT, D. Boundary Layer in Fibrous Composite Materials, **Acta Mech.**, 213, 2010.

ADRIANOV, I. V.; LESNICHAYA, V. A.; MANEVITCH, L. I. Homogenization Methods in the Static and Dynamics of Ribbed Shells, **Nauka**, Moscow, in Russian, 1985.

BAKHVALOV, N.; PANASENKO, G. **Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media – Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials**. Kluwer, Dordrecht, 1989.

BENSOUSSAN, A.; LIONS, J. L.; PAPANICOLAOU, G. **Asymptotic Methods in Periodic Structures**, North-Holland, Amsterdam, 1978.

DUMONTET, H. Study of Boundary Layer Problem in Elastic Composite Materials, **Model. Math. Annual. Numer.**, n.20, p. 265-286, 1986.

GUZ', A. N.; KOKHANENKO, YU. V. Edge Effects in Composites, **Int. Appl. Mech.**, v.31, n. 3, p. 165-181, 1995.

KALAMKAROV, A. L. **Composite and Reinforced Elements of Construction**, Wiley, Chichester, NY, 1992.

KALAMKAROV, A. L.; GEORGIADES, A. V. Micromechanical Modeling of Smart Composite Structures, **Smart Mater. Struct.**, v.11, p. 423-434, 2002.

KEVORKIAN, J.; COLE, J. D. **Perturbation Methods in Applied Mathematics**, Springer Verlag, 1981.

PANASENKO, G. P. Homogenization for Periodic Media: from Microscale to Macroscale, **Physics of Atomic Nuclei**, v. 71, n. 4, p. 681-694, 2008.

PETIT, P. H. A simplified method of determining the inplane shear stress-strain response of unidirectional composites, **Composite Material: Testing and Design. ASTM STP** , v. 460, p. 83-93, 1969.

NEUSS-RADU, M. A Result on the decay of the Boundary Layers in the Homogenization Theory, **Journal of Asymptotic Analysis**, v. 23, n. 3-4, p. 313-328, 2000.

SANCHEZ-PALENCIA, E. Homogenization in Mechanics: A survey of Solved and open Problems, **Rend. Sem. Mat.**, v. 44, p. 1-45, 1986.

SANCHEZ-PALENCIA, E. **Non Homogeneous Media and Vibration Theory**, Springer, Heidelberg, 1980.

TANG, S. A boundary Layer Theory – Part I: Laminated Composites in Plane Stress, **Journal of Composite Materials**, n. 9, p. 33-41, 1975.

TANG, S.; Levy, A. A boundary Layer Theory – Part II: Extension of Laminated Finit Strip, **Journal of Composite Materials**, n. 9, p. 42-52, 1975.

TANI, I. History of Boundary-Layer Theory, **Annual Reviews Fluid Mechanic**, v. 9, p. 87-111, 1977.

